I.S. Jeludev

SIMETRIA ȘI APLICAȚIILE EI

Scanned with OKEN Scanner

I. S. JELUDEV

SIMETRIA ȘI APLICAȚIILE EI

Traducere din limba rusă de
NATALIA FIUCIUC

Scanned with OKEN Scanner

CUVÎNT ÎNAINTE

Îmi este deosebit de plăcut să prezint cititorilor din țara noastră cartea profesorului I.S. Jeludev „Simetria și aplicațiile ei". Pe de o parte, datorez acest sentiment faptului că de autor mă leagă, de mai mulți ani, excelente relații colegiale, de colaborare științifică în cadrul unor programe de cooperare stabilite între Institutul central de fizică din București și Institutul de cristalografie al Academiei de Științe a U.R.S.S., din Moscova, precum și pe linia Agenției Internaționale pentru Energia Atomică de la Viena, unde profesorul Jeludev își desfășoară temporar activitatea în calitate de director general adjunct.

Pe de altă parte, încerc bucuria firească de a face larg cunoscută o lucrare de excepție în acest domeniu atît de familiar tuturor celor ce profesează fizica. Într-adevăr, virtuțile descriptive și predictive ale conceptului de simetrie sînt bine cunoscute în fizica contemporană. În jurul lor s-au grupat eforturi intelectuale însemnate, s-au creat prestigii și personalități ca Weyl, Cartan, Lie, von Neuman, Gell Mann, Pontryaghin, Șubnikov și mulți alții și s-a clădit o vastă și revelatoare literatură de specialitate. Expresia matematică a utilizării conceptului de simetrie ca instrument de cunoaștere — teoria grupurilor, riguros formalizată și armonios articulată pe necesitățile diverselor științe ale naturii ca fizica, chimia, biologia, este privită, de obicei, ca o ramură elevată a matematicilor, a cărei însușire și stăpînire în vederea aplicațiilor este dificilă, laborioasă.

Puține sînt lucrările care izbutesc să sugereze firescul noțiunilor și relațiilor cu care operează teoria grupurilor, un firesc izvorît din natura însăși, pe care această teorie o surprinde în unele din aspectele esențiale ale ordinii ce o caracterizează.

Consider că tocmai în această privință, cartea alcătuită de colegul și prietenul meu, profesorul Jeludev, este exemplară. Cititorul, atît cel avizat cît și cel neinițiat, va descoperi că simetria și aplicațiile ei pot fi prezentate nu numai ca o colecție de definiții, leme și teoreme aride la primul contact, cît și ca o narațiune atrăgătoare despre aparența lucrurilor și fenomenelor care, în imensa și dinamica ei varietate, ascunde adesea o mare și frumoasă simplitate. Subliniez că această narațiune nu este nicidecum lipsită de rigoare. În cuprinsul lucrării noțiunile și propozițiile matematice ale teoriei grupurilor sînt peste tot prezente și intens valorificate. Fluența și intuitivitatea cărții decurg

Scanned with OKEN Scanner

din faptul primordial că ea este gîndită și scrisă de un fizician. Într-adevăr, din unghiul de vedere al matematicianului, acțiunile sau fenomenele fizice pe care le suportă un sistem dat sînt, mai totdeauna, prezentate ca un derivat al simetriei structurii acestuia, ceea ce este, desigur, adevărat. Autorul cărții de față însă încearcă și reușește, spre folosul cert al cititorului, și procesul explicativ invers: foarte adesea el prezintă structurile și transformările posibile ale acestora ca pe rezultatul unor acțiuni, reale sau virtuale. În lucrare se împletesc în permanență simetriile structurilor cu simetriile acțiunilor pe care acestea le suportă sau le provoacă, ceea ce dezvăluie firescul multor fenomene, regularități și legități, legătura organică dintre geometrie și dinamică în Natură și una din ambițioasele ei reflectări — fizica.

În acest spirit, în cartea profesorului Jeludev cititorul va găsi nu numai un comentariu cuprinzător al teoriei grupurilor, ci și o prezentare, accesibilă dar riguroasă, a raporturilor acesteia cu fenomene, proprietăți și comportări fizice ale materiei, mai familiare sau mai speciale, ca dilatarea termică, conductibilitatea și polarizarea electrică, piroelectricitatea și piromagnetismul, efectul Hall, efectele piezoelectrice și piezomagnetice, rotirea planului de polarizare a luminii, alături de incursiuni în zonele conceptuale de bază ale fizicii, referitoare la spațiu și timp, cîmpuri, relativitate, sistematica particulelor elementare, conservarea și distrugerea simetriei etc. Țin să subliniez faptul că materialul prezentat în carte îmbină, în forma personală aleasă de autor, rezultate consacrate din domeniul ales cu rezultate ale cercetărilor personale ale autorului, unele de dată recentă.

Ținînd seama de puternica dezvoltare pe care o cunosc în țara noastră fizica stării condensate, cu aplicații îndeosebi în elaborarea de noi materiale și înlocuitori, precum și celelalte domenii ale fizicii în care simetria și aplicațiile ei joacă un rol esențial, apreciez că efortul Editurii tehnice de a pune la îndemîna cititorilor din țara noastră cartea de față va fi răsplătit cu o largă audiență. Este, de altfel, a doua lucrare a profesorului I.S. Jeludev, pe care Editura tehnică o prezintă publicului român, după „Cristale electrice", care a fost deosebit de bine primită.

Recomand cu toată căldura această carte, atît celor care și-au dorit o inițiere în domeniul prezentat de autor, cît și celor care, avînd experiența unor lecturi anterioare, vor descoperi, citind-o, plăcerea de a urmări un mod de gîndire original și inspirator într-una din zonele bine consacrate ale fizicii contemporane.

Acad. prof. IOAN URSU

Scanned with OKEN Scanner

PREFAȚĂ LA EDIȚIA ÎN LIMBA RUSĂ

Cuvîntul simetrie *are în prezent o semnificație largă și foarte variată. Oameni diferiți îi atribuie adeseori sensuri diferite. Acest cuvînt poate servi pentru descrierea fenomenelor și obiectelor neînsufletite, a celor din lumea animală și vegetală, a diferitelor reprezentări, a mărimilor matematice, figurilor geometrice, a cosmosului ca și a universului particulelor elementare etc.*

În sensul cel mai larg cuvîntul „simetrie" presupune existența, la obiecte și fenomene, a unei invarianțe *în raport cu unele transformări. Cel mai des aceasta se referă la invarianța figurilor geometrice sau a obiectelor față de schimbarea locurilor părților lor egale prin rotații și reflexii. În alte cazuri se are în vedere invarianța unor fenomene în raport cu deplasarea sau cu „reflectarea" în timp. În primul dintre aceste cazuri se poate vorbi despre* invarianță spațială, *iar în cel de al doilea despre* invarianță temporală. *Uneori pentru fenomene și figuri se consideră simultan atît invarianța spațială, cît și cea temporală.*

Privim o floare ale cărei patru petale sînt identice și spunem că floarea este simetrică. Simțim simetria datorită repetării în timp a orelor, zilelor, anilor. Legilor riguroase ale simetriei le sînt subordonate arta și construcțiile Egiptului și Greciei antice. Ne încîntă fațetele cristalelor și forma fulgilor de nea. Gradul cel mai înalt de simetrie se observă la corpurile de rotație. De simetrie se servesc deseori, în prezent, fizicienii și chimiștii, matematicienii și astronomii, medicii și biologii, inginerii și arhitecții. O serie de probleme ale simetriei prezintă interes pentru filozofie.

Natura ne oferă minunate forme simetrice, iar omul o imită adeseori. Diferitelor reprezentări simetrice din natură li se găsește uneori cu ușurință o explicație rațională. De simetria construcției cristalelor răspund forțele de interacțiune dintre particulele care le formează. Aceste particule sînt dispuse una în raport cu alta după legi bine determinate astfel încît energia lor să fie minimă și spațiul respectiv să fie complet ocupat. Ansamblurile moleculelor ce compun „obiectele" biologice, ca rezultat al unor complexe interacțiuni, chiar din punct de vedere pur energetic, formează

Scanned with OKEN Scanner

construcțiile simetrice pe care le întîlnim în lumea vegetală și la organismele vii.

Particularitățile formei exterioare sînt adeseori în directă dependență cu caracteristicile acțiunii externe. Un exemplu elocvent în acest sens este influența forțelor gravifice. Astfel, în orientarea plantelor ca și a organismelor vii se reflectă direcția forței grafivice: atît la vegetație, cît și la viețuitoare se distinge „sus" și „jos". Caracteristicile deplasării viețuitoarelor sînt corelate cu forma acestora. În concordanță cu aceasta, la ele diferă mișcarea „înainte" de mișcarea „înapoi", iar mișcarea „laterală" este echivalentă, ceea ce se reflectă în construcția identică a părților lor „stîngă" și „dreaptă".

În fenomenele ce privesc simetria lumii vii și a celei neînsufletite nu există nimic mistic. Condiții concrete pot conduce (și aceasta se observă adeseori) la faptul că unele obiecte sau altele apar lipsite de elemente de simetrie sau, cum se spune în astfel de cazuri, că ele sînt asimetrice. *Totuși, distrugerea simetriei nu ne provoacă totdeauna un sentiment de dezordine. Astfel, clasicismul riguros în arhitectură și în artă cedează deseori locul construcțiilor asimetrice.*

În diferitele domenii ale cunoștințelor umane reprezentarea de simetrie este concretizată. O astfel de concretizare, precum și aplicațiile simetriei, îndeosebi în științele fizice, vor fi date în cartea de față. O mare parte a acestei cărți o reprezintă expunerea unor probleme la care autorul a lucrat în ultimii douăzeci de ani

AUTORUL

Scanned with OKEN Scanner

Capitolul I

SIMETRIA

1.1. SIMETRIA FIGURILOR TRIDIMENSIONALE DE DIMENSIUNI FINITE (CONSIDERAŢII GENERALE)

O parte a studiului general asupra simetriei o reprezintă simetria unei categorii speciale de figuri de dimensiuni finite, aşa-numita simetrie *punctuală*. Simetria figurilor rezultate prin translaţia spaţială a punctelor formează obiectul simetriei *spaţiale*. În această carte va fi vorba numai despre simetria punctuală.

Pentru descrierea simetriei figurilor geometrice sînt suficiente reprezentările simetriei obişnuite, care analizează doar elementele spaţiului. Noţiunea de simetrie se concretizează în acest caz astfel : *simetria figurilor geometrice este proprietatea acestora de a conţine în sine părţi egale şi uniform distribuite.* Legile distribuţiei uniforme a părţilor egale ale figurilor sînt determinate de *operaţiile de simetrie* (sau *transformări de simetrie*). Drept transformări de simetrie ale figurilor tridimensionale pot fi alese *rotaţiile* şi *rotaţiile cu oglindire* (rotoreflexii) sau *rotaţiile şi rotaţiile cu inversiune* (rotoinversiuni). După efectuarea unei transformări de simetrie asupra unei figuri oarecare, acesta nu diferă de figura iniţială.

Operaţia de suprapunere a părţilor unei figuri prin simple rotaţii este clară şi nu necesită o analiză specială. Un exemplu de figură ale cărei părţi se suprapun la efectuarea unor rotaţii simple cu unghiurile de 90 şi 72° este dat în fig. 1.

Suprapunerea părţilor unei figuri în cazul rotaţiilor cu oglindire se obţine cu ajutorul unei operaţii compuse, formată dintr-o rotaţie urmată de oglindirea (reflectarea) părţilor figurii într-un plan perpendicular pe axa de rotaţie. Figura reprezentată în desenul următor (fig. 2) se suprapune peste sine însăşi printr-o rotaţie cu oglindire * de 60°.

---

* Alte operaţii de suprapunere a părţilor figurii respective nu vor fi analizate aici.

Scanned with OKEN Scanner

Rotaţiile cu inversiune sînt de asemenea operaţii compuse, care constau dîn rotaţii urmate de inversiunea figurii faţă de punctul ce reprezintă centrul ei de greutate. Astfel, figura din desenul precedent (fig. 2) se suprapune peste ea însăşi la o rotaţie cu inversiune de 120°. Fiecare rotaţie cu inversiune poate fi reprezentată ca o oglindire (şi invers); de aceea, nu

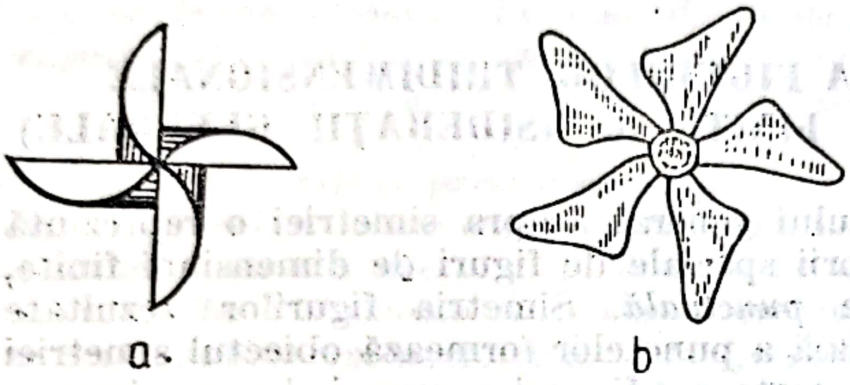


Fig. 1. Exemple de figuri care au părţi ce se suprapun doar prin rotaţii simple:
a — „elice" (suprapunerea se realizează printr-o rotaţie de 90°); floarea Vince herbacea (suprapunerea se obţine printr-o rotaţie cu 72°).

Fig. 2. Figură ale cărei părţi se suprapun printr-o rotaţie cu oglindire de 60°. Figura constă din trei tetraedre „stîngi" şi trei „drepte", nesimetrice (de formă generală).

este necesar să se folosească, la descrierea simetriei figurilor, ambele tipuri de rotaţii. În cele ce urmează, drept operaţii de simetrie pentru descrierea figurilor de dimensiuni finite vor fi considerate numai rotaţiile simple şi rotaţiile cu oglindire.

Fiecare figură finită are cel puţin un punct care rămîne pe loc atunci cînd se efectuează transformări de simetrie. Pentru cazul din fig. 2, de exemplu, un astfel de punct este centrul de greutate al figurii. Asemenea puncte se numesc *singulare*. Expresia „simetrie punctuală" se referă tocmai la aceasta. Singulare, adică netransformabile prin operaţii de simetrie, pot fi nu numai punctele, ci şi liniile, planele, volumele. În cazul figurii 1 sînt singulare axa elicei şi axa florii. Pentru fiecare tetraedru oarecare (vezi fig. 2) singular este volumul tetraedrului, deoarece o asemenea figură are drept transformare de simetrie numai operaţia care lasă volumul pe loc (operaţia 1; vezi mai departe).

Operaţiile de simetrie sînt considerate *echivalente* (sau identice) dacă ele conduc la una şi aceeaşi regrupare a părţilor figurii. Astfel, pentru figura reprezentată în fig. 2 operaţia de

Scanned with OKEN Scanner

rotaţie cu 60° spre stînga (dreapta) este identică cu operaţia de rotaţie cu 300° la dreapta (stînga).

O operaţie echivalentă cu două operaţii succesive se numeşte *produs* al acestor operaţii şi se notează cu simbolurile respectivelor operaţii efectuate puse unul după altul. Trebuie să remarcăm faptul că rezultatul a două transformări de simetrie succesive poate să depindă de ordinea efectuării operaţiilor şi, de aceea, mai întîi se va scrie prima operaţie, în produsul respectiv, şi după aceea a doua.

Oricare transformare de simetrie poate fi repetată de oricîte ori dorim. Repetarea unei operaţii de două ori, de trei ori ş.a.m.d. corespunde *puterilor* respectivei operaţii. Dacă notăm operaţia iniţială cu M, puterile ei se vor simboliza M^2, M^3, M^4 etc.

Dintre operaţiile de simetrie trebuie să ne oprim în mod special asupra *inversiunii* şi a *transformării identice*. Operaţia de inversiune constă în reflectarea (oglindirea) figurii faţă de un punct. Fie O punctul în care are loc reflexia. Inversiunea constă în aceea că toate punctele figurii suferă translaţii de-a lungul unor drepte care trec prin O şi ca rezultat ele se deplasează în partea opusă, în aşa fel încît noile distanţe ale tuturor punctelor figurii pînă la O să fie egale cu cele iniţiale. Dacă figura coincide cu ea însăşi în urma inversiunii faţă de punctul dat, acest punct se numeşte *centru de simetrie* şi se spune că figura are un centru de simetrie (c). Operaţia de *identitate* (sau operaţie *unitate*) este acea operaţie prin care figura se transformă în ea însăşi rămînînd pe loc.

Pentru a lămuri mai bine definiţiile date mai sus trebuie să ne oprim asupra noţiunii de *egalitate* a figurilor şi părţilor lor componente. Noţiunea de egalitate este strîns legată de aceea de transformare de simetrie. În cazurile în care se au în vedere părţile figurilor, părţi egale sînt acelea care se transformă una în alta, cu alte cuvinte care-şi schimbă reciproc locurile prin transformări de simetrie. Trebuie deosebite două feluri de egalitate a părţilor unei figuri simetrice — de *oglindire* şi de *suprapunere* (coincidenţă). Părţile unei figuri egale prin oglindire se transformă una în alta prin rotaţii cu oglindire, iar părţile identice prin suprapunere — prin rotaţii simple Uneori operaţiile de rotaţie simplă se numesc operaţii de *ordinul întîi*, iar cele de rotaţie cu oglindire — de *ordinul doi*.

Noţiunea de egalitate poate fi aplicată nu numai la părţile unei figuri, ci şi la figuri înseşi, ca întreg. Astfel, pot exista figuri care sînt egale una cu alta numai prin suprapunere [de exemplu, o pereche de două tetraedre drepte (sau stîngi)

Scanned with OKEN Scanner

luate separat]. Mîna dreaptă şi cea stîngă ale omului sînt egale (identice) una cu alta numai prin oglindire.

Unele figuri sînt egale între ele şi prin suprapunere şi prin oglindire (de exemplu, două sfere de acelaşi diametru). În cazul cînd figurile sînt egale între ele numai prin oglindire se numesc *enantiomorfe* una faţă de alta. Una dintre figurile enantiomorfe se consideră *dreaptă*, iar cealaltă *stîngă*. Un exemplu de figuri enantiomorfe este dat în fig. 3.

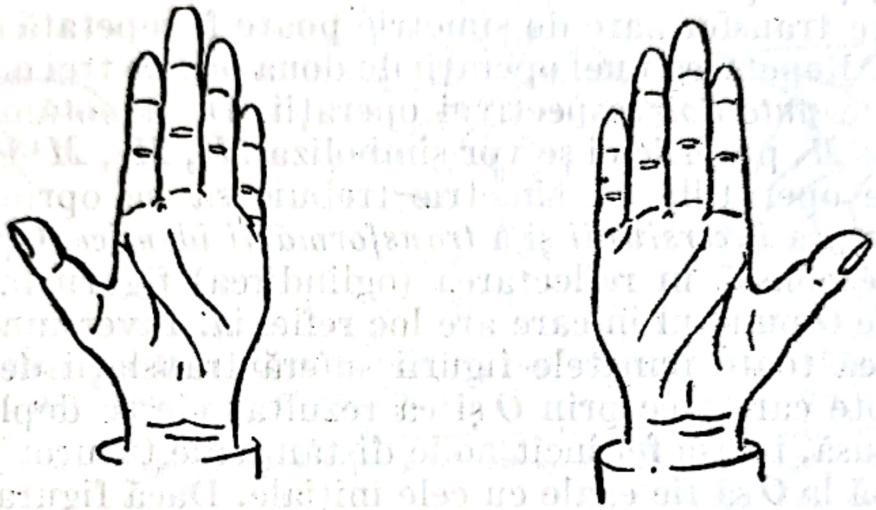


Fig. 3. Mîna stîngă şi cea dreaptă sînt enantiomorfe una faţă de alta.

Foarte des la descrierea simetriei figurilor avem de-a face nu cu operaţii de simetrie, ci cu *elemente de simetrie*. Elemente de simetrie ale figurilor finite (de dimensiuni finite) sînt *axele de rotaţie* şi *axele de oglindire*. Primele se notează

$$1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, \ldots, \infty \text{ *}$$

iar celelalte

$$\bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}, \bar{6}, \bar{7}, \ldots \bar{\infty}$$

cifrele indicînd ordinul axei.

Cînd o figură are o axă de rotaţie de ordinul n, înseamnă că această figură se suprapune peste ea însăşi după rotaţia egală cu $1/n$ din circumferinţă. Astfel, pentru o figură cu axă de simetrie de ordinul 4 rotaţia este egală cu 1/4 din circumferinţă (deci 90°), pentru axă de ordinul şase (6) — cu 1/6 din circumferinţă (60°) etc. Axa de ordinul întîi (1) corespunde transformării identice. Axa 1 este operaţie de simetrie pentru toate figurile finite.

---

* Aşa se notează elementele de simetrie de ordin infinit.

Scanned with OKEN Scanner

În ce constau axele de oglindire rezultă din cele spuse mai înainte. Desenul din fig. 2 are o axă de oglindire de ordinul șase perpendiculară pe planul desenului. Axa de oglindire de ordinul întîi ($\bar{1}$) corespunde reflectării simple (fără rotație) față de un plan (în oglindă); acesta se numește *plan de simetrie* și se notează

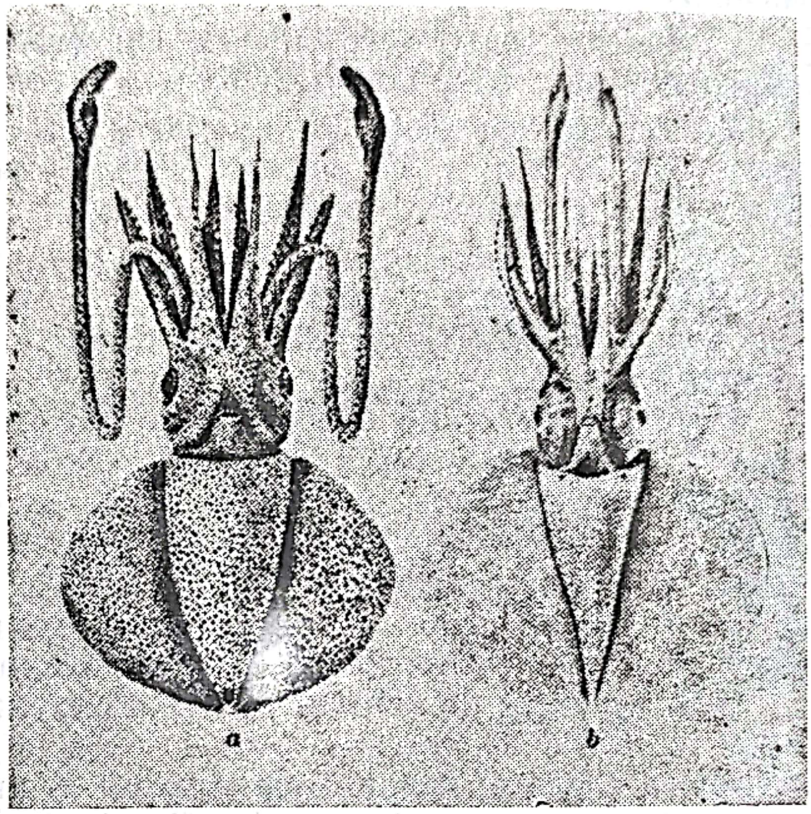


Fig. 4. Molusca Dicotenthis discus (sepia) are ca element de simetrie numai un plan de simetrie.

cu litera *m* (vezi fig. 4). Axa de oglindire de ordinul doi ($\bar{2}$) reprezintă operația de inversiune în raport cu centrul de simetrie și se notează cu *c*. Axa $\bar{3}$ poate fi reprezentată ca ansamblul format de axa 3 cu planul de simetrie *m* perpendicular pe ea.

Din cele spuse mai sus se observă că noțiunea de „element de simetrie" este mai largă decît aceea de „operație de simetrie". Elementul de simetrie include în sine toate puterile unei operații date. Astfel, prin axă de simetrie de ordinul 4 se înțelege ansamblul operațiilor incluzînd $4^0 = 1$, $4^1 = 4$, $4^2 = 2$, $4^3 = 4^{-1}$. Prima dintre acestea reprezintă operația de identitate, a doua — rotația cu 90°, a treia — rotația cu 180° (rotațiile cu 180° în sensuri opuse sînt echivalente), iar operația a patra (4^3) este o rotație de 270°, într-un sens oarecare, egală cu rotația de 90° în sensul opus (4^{-1}).

Ansamblul tuturor operațiilor de simetrie posibile pentru o figură nu poate fi arbitrar. Acest ansamblu descrie un *grup de*

Scanned with OKEN Scanner

simetrie. Aceasta înseamnă că ansamblul tuturor transformărilor de simetrie ale unei figuri satisface următoarele postulate de grup :

1°. Produsul a două operaţii oarecare M şi N care aparţin unui grup de simetrie este echivalent cu o operaţie P ce aparţine aceluiaşi grup : $MN = P$.

2°. Pentru toate operaţiile de simetrie este valabilă legea asociativităţii : $(MN)P = M(NP)$.

3°. Printre operaţiile de simetrie există o operaţie A astfel încît $AM = MA = M$ pentru oricare operaţie a grupului. Operaţia A se numeşte operaţie *unitate*.

4°. Pentru fiecare operaţie M există operaţia *inversă*, aparţinînd aceluiaşi grup de simetrie. Ea se notează cu M^{-1} şi satisface relaţia $MM^{-1} = M^{-1}M = A$, unde A reprezintă operaţia unitate.

Numărul operaţiilor neechivalente care formează un grup de simetrie se numeşte *ordin al grupului*. La rîndul său, ordinul grupului este egal cu numărul maxim de părţi egale ale unei figuri, părţi în care respectiva figură poate fi divizată. Din cele spuse rezultă, de exemplu, că ordinul grupului de simetrie al figurii reprezentate în fig. 1, a este patru, pentru cea din fig. 1, b — cinci, în cazul fig. 2 — şase ş.a.m.d.

Dacă operaţia de echivalenţă este pentru o figură transformare de simetrie unitate, atunci acea figură se numeşte *asimetrică*. Ordinul grupului de simetrie al unei asemenea figuri este egal cu unitatea (1). Dacă o figură simetrică este divizată în numărul maxim posibil de părţi egale fiecare asemenea parte, luată separat, este o figură asimetrică.

Dintre *operaţiile* de simetrie ale unui grup dat se pot alege unele care să formeze un nou grup. Acest nou grup se va numi *subgrup* al grupului iniţial. Subgrupul face parte din grupul iniţial. Analog, elementele de simetrie ale subgrupului reprezintă o parte din elementele de simetrie ale grupului iniţial. Astfel, grupul 4 considerat mai înainte are două subgrupuri : grupul 2 (cu operaţiile 1 şi 2 şi cu axele de simetrie 1 şi 2 respectiv) şi grupul 1.

În concordanţă cu proprietăţile operaţiilor grupurilor, combinaţiile lor pot conduce la diferite combinaţii ale elementelor de simetrie în figuri. Printre acestea pot fi evidenţiate combinaţiile *de acelaşi tip*, de exemplu combinaţiile care descriu simetria piramidelor, a prismelor etc. În primul caz figura va avea o axă de simetrie de ordinul n şi n plane de simetrie care

Scanned with OKEN Scanner

trec prin această axă. Notarea grupurilor de simetrie de acest tip va fi *nmm* (de exemplu, *3mm*, *6mm* ş.a.m.d.; fig. 5). Pentru prisme, în afară de cele de mai sus, este caracteristică prezenţa unui plan de simetrie perpendicular pe axa *n*, a axelor de sime-

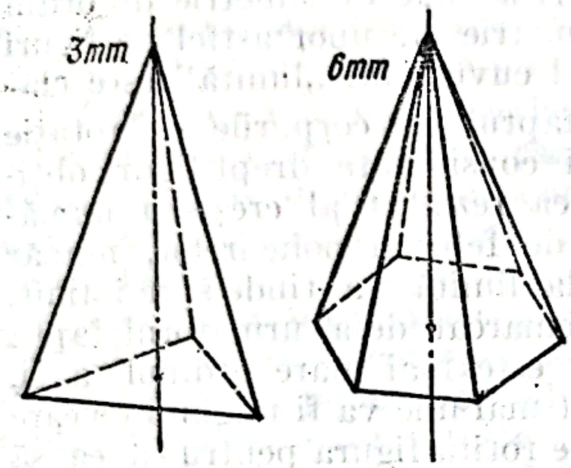


Fig. 5. Piramidele au ca elemente de simetrie o axă de simetrie şi plane de simetrie care trec prin această axă (ordinul axei şi numărul planelor sînt egale cu numărul feţelor triunghiulare ale piramidei). Grupurile de simetrie ale piramidei se notează cu *nmm*.

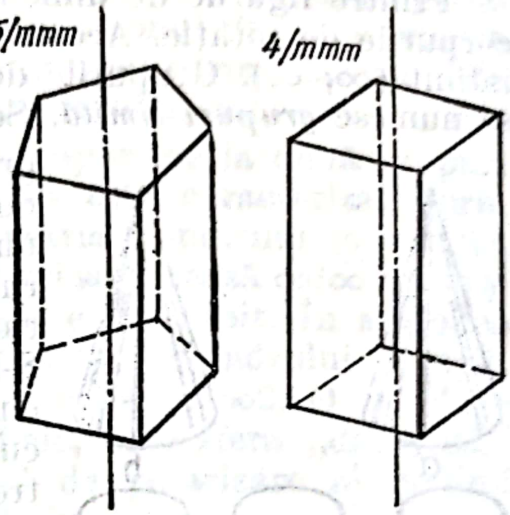


Fig. 6. Prismele au, în afară de elementele de simetrie caracteristice piramidelor, şi un plan de simetrie şi axe 2, perpendiculare pe axa prismei. Dacă ordinul axei prismei este par, prisma are centru de simetrie. Grupurile de simetrie ale prismei se notează *n/mmm*.

trie 2 perpendiculare pe axa *n* şi (în unele cazuri, pentru *n* pari) a unui centru de simetrie. Asemenea grupuri de simetrie se simbolizează în modul următor : *n/mmm* (de exemplu, *4/mmm*, *5/mmm* etc.; fig. 6). Linia oblică înseamnă în acest caz că elementul de simetrie scris imediat după ea (planul *m*) este perpendicular pe axa *n*. În simbolizarea grupurilor se indică numai aşa-numitele elemente de simetrie *generatoare*; dacă ele sînt cunoscute se pot obţine toate celelalte. Aşa, de exemplu, elementele de simetrie generatoare ale grupului *3mm* dau un ansamblu compus dintr-o axă de simetrie de ordinul trei şi trei plane de simetrie ce trec prin această axă (dar fără să o intersecteze).

Din exemplele date se vede deja că numărul grupurilor de simetrie ale figurilor finite este infinit. Alte combinaţii de acelaşi tip de elemente de simetrie, adică alte grupuri de simetrie posibile, vor fi analizate în § 1.3, iar simetria figurilor care au o axă de ordin infinit — în § 1.2.

Scanned with OKEN Scanner

1.2. GRUPURI LIMITĂ DE SIMETRIE. PRINCIPIUL SIMETRIEI FORMULAT DE P. CURIE

a) GRUPURI LIMITĂ

Printre figurile de dimensiuni finite un loc aparte îl ocupă corpurile de rotaţie. Aceste figuri au axe de simetrie de ordin infinit (∞, $\overline{\infty}$). Grupurile de simetrie ale unor astfel de figuri se numesc *grupuri limită*. Sensul cuvîntului „limită" este clar prin faptul că corpurile de rotaţie pot fi considerate drept figuri obţinute ca rezultat al creşterii numărului de feţe al poliedrelor, număr care la limită va tinde spre infinit. S-a remarcat deja următorul fapt: cu cît este mai mare ordinul axei, cu atît mai mic va fi unghiul cu care trebuie rotită figura pentru ca ea să nu difere cu nimic, după rotaţie, de figura iniţială. Pentru corpurile de rotaţie şi figurile care au o axă de simetrie ∞ o asemenea rotaţie se realizează cu un unghi infinit de mic.

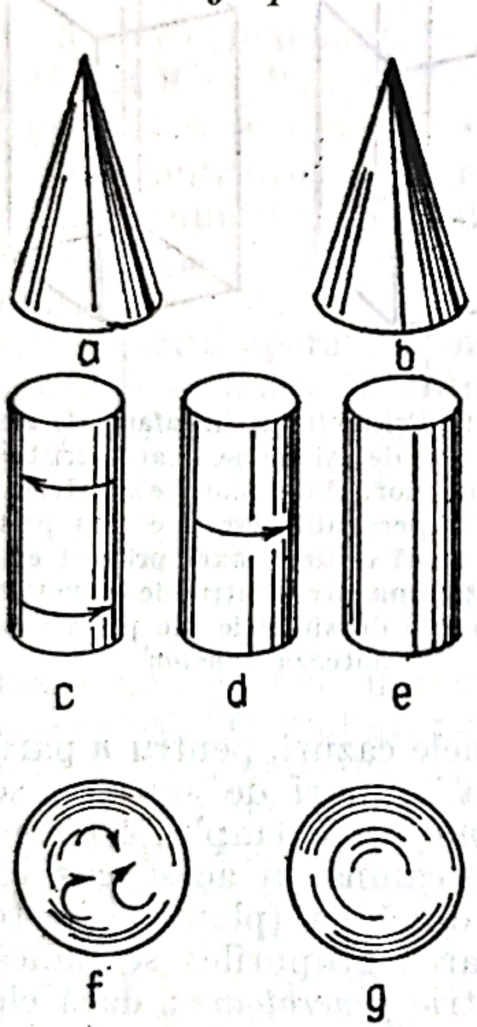


Fig. 7. Figuri geometrice care au grupuri de simetrie limită:
a — con de rotaţie (grupul de simetrie ∞); b — con fix (grupul de simetrie ∞mm — grupul de simetrie al vectorului polar); c — cilindru torsionat (grupul de simetrie $\infty 2$); d — cilindru de rotaţie (grupul de simetrie ∞/m — grupul de simetrie al vectorului axial); e — cilindru fix (grupul de simetrie ∞/mmm); f — sferă fără plane de simetrie (grupul de simetrie $\infty/\infty 2$); g — sferă cu plane de simetrie (grupul de simetrie $\infty/\infty/mmm$). Conul de rotaţie, cilindrul torsionat şi sfera fără plane de simetrie pot avea forme enantiomorfe — dreaptă şi stîngă.

P. Curie a arătat că există şapte grupuri de simetrie ale figurilor finite (fig. 7). Aceste grupuri descriu simetria sferei, a cilindrului şi conului. Conul poate fi considerat drept o piramidă (vezi fig. 5). iar cilindrul — o prismă (vezi fig. 6), cu număr infinit de feţe. Sfera, poate fi considerată, în general, figură limită a poliedrelor cub, octaedru, dodecaedru etc.

Un cilindru obişnuit are o axă de ordin infinit şi o mulţime infinită de axe de simetrie de ordinul doi perpendiculare pe axa ∞. În afară de aceasta, cilindrul are un plan de simetrie m perpendicular pe axa ∞, un număr infinit de plane care trec prin axa

Scanned with OKEN Scanner

și un centru de simetrie. Grupul de simetrie al unui asemenea cilindru se notează ∞/mmm. Același grup de simetrie îl are și elipsoidul de rotație.

Dacă cilindrul este răsucit (torsionat) în jurul axei ∞, toate planele lui de simetrie dispar; în acest caz, grupul de simetrie se simbolizează $\infty 2$. Cilindrul care se rotește nu are plane de simetrie longitudinale (grupul ∞/m). Conul fix are o axă de simetrie ∞ și plane care trec prin ea (grupul ∞mm), iar conul de rotație are numai o axă de simetrie ∞ (grupul ∞).

Sferele, ca figuri geometrice, pot aparține la două grupuri de simetrie. Într-un prim caz, sfera este caracterizată prin aceea că toate diametrele ei au simetria cilindrului (obișnuit). În acest caz, grupul de simetrie al sferei se notează $\infty/\infty/mmm$ și indică faptul că numărul diametrelor este infinit. În al doilea caz, sfera are un diametru cu simetria cilindrului răsucit. Grupul de simetrie corespunzător se scrie $\infty/\infty 2$. O astfel de sferă, reală din punct de vedere fizic, este sfera „decupată" dintr-un mediu care rotește planul de polarizare al luminii (de exemplu, dintr-o soluție de zahăr în apă).

În completare la aceste șapte grupuri de simetrie limită este util să considerăm încă cinci grupuri, care, deși nu sînt grupuri limită în înțelesul deplin al acestui cuvînt, ne permit să dezvăluim particularitățile unor grupuri de simetrie ale figurilor finite. Vom denumi aceste cinci grupuri *aproape limită*. Reprezentarea primului dintre aceste grupuri aproape limită poate fi desenul din figura 2. Evident, mărind numărul tetraedrelor drepte și stîngi într-o asemenea figură se poate obține seria $\bar{6}$, $\bar{8}$, $\overline{10}$, $\overline{12}$, $\overline{14}$,..., care trebuie să se închidă cu grupul aproape limită $\overline{\infty}$. La limită figura va avea grupul limită ∞/m, dar acest grup se obține mai natural din seria $1/m$, $2/m$, $3/m$, $4/m$, $5/m$,..., care poate fi reprezentată sub forma unei serii de prisme ce nu au plane de simetrie longitudinale.

Pentru figurile acestei (ultime) serii este caracteristică prezența unui plan de simetrie perpendicular pe axa de simetrie. În același timp, în aceste figuri suprapunerea părților prin transformări de simetrie este posibilă nu numai prin reflectarea directă în planul menționat, perpendicular pe axa de simetrie, ci și ca rezultat al rotațiilor cu oglindire. La figurile cu simetrii $\bar{6}$, $\bar{8}$, $\overline{10}$,... un asemenea plan nu există și suprapunerea (prin rotații perpendiculare pe planul desenului) este posibilă numai cu ajutorul unei rotații cu oglindire. De aici urmează că grupul ∞/m este de simetrie superioară grupului $\overline{\infty}$. În primul sînt

Scanned with OKEN Scanner

conţinute toate elementele de simetrie ale celui de-al doilea ş.a.m.d. Grupul aproape limită $\overline{\infty}$ este un subgrup al lui ∞/m şi este subordonat acestuia.

Astfel, atît seria $\bar{6}$, $\bar{8}$, $\bar{10}$,..., cît şi seria $1/m$, $2/m$, $3/m$,... converg în ultimă instanţă către unul şi acelaşi grup limită ∞/m, dar modul de tindere la limită al acestor două serii este diferit. În aceasta constă şi raţiunea considerării, în completare la grupul limită ∞/m, a grupului aproape limită $\overline{\infty}$.

Încă un grup aproape limită se obţine prin considerarea grupului limită al cilindrului fix ∞/mmm, dacă se ţine seamă (ca şi în cazul precedent) că în cilindru un există o axă ∞ perpendiculară pe planul de simetrie şi că această axă este doar axa de rotaţie cu oglindire $\overline{\infty}$. Acest grup aproape limită se notează cu $\overline{\infty}mm$.

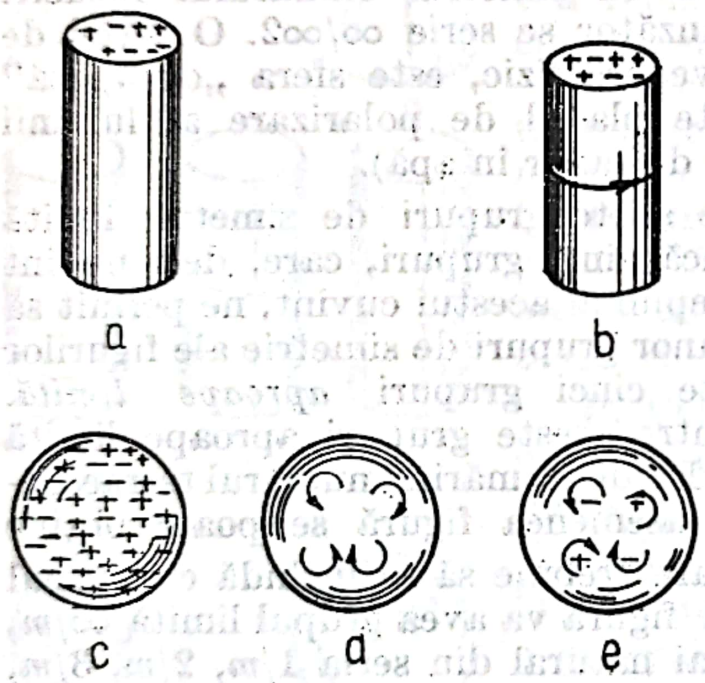


Fig. 8. Reprezentare formală a grupurilor de simetrie aproape limită :
a — grupul $\overline{\infty}$ mm; b — grupul $\overline{\infty}$; c — grupul $\infty/\infty mm$; d — grupul $\infty/\infty/m$; d — grupul ∞/∞.

Reprezentarea geometrică a grupurilor aproape limită este mai complicată decît a celor limită. Astfel, grupul $\overline{\infty}mm$ poate fi reprezentat sub forma unui cilindru la care toate liniile paralele cu axa sînt vectori polari, orientaţi astfel încît jumătate dintre ei să fie îndreptaţi într-o parte, iar cealaltă în partea opusă, vectorii fiind distribuiţi statistic în bazele cilindrului (fig. 8, a). Un asemenea cilindru, care se roteşte în jurul axei sale (deci nu este fix), reprezintă grupul limită $\overline{\infty}$ (fig. 8, b).

În sfera reprezentată în figura 7, g diametrele au simetria cilindrului fix (∞/mmm), iar în fig.7,f — simetria cilindrului răsucit ($\infty 2$). Printre figurile izometrice (cubice) de dimensiuni finite sînt şi figuri la care unele direcţii au simetria conului fix (grupul ∞mm), sau simetria cilindrului de rotaţie (grupul ∞/m), or simetria conului de rotaţie (grupul ∞). Pentru asemenea figuri se obţin grupuri aproape limită cu diametre de simetrie corespunzătoare, şi anume grupurile $\infty/\infty mm$, $\infty/\infty/m$, ∞/∞. Figurile corespunzătoare acestora

sînt reprezentate formal în fig. 8, c, d, e. Diametrele primei sfere sînt vectori polari, ai celei de-a doua — vectori axiali, iar ai celei de-a treia reprezintă o combinaţie a primelor două feluri de diametre.

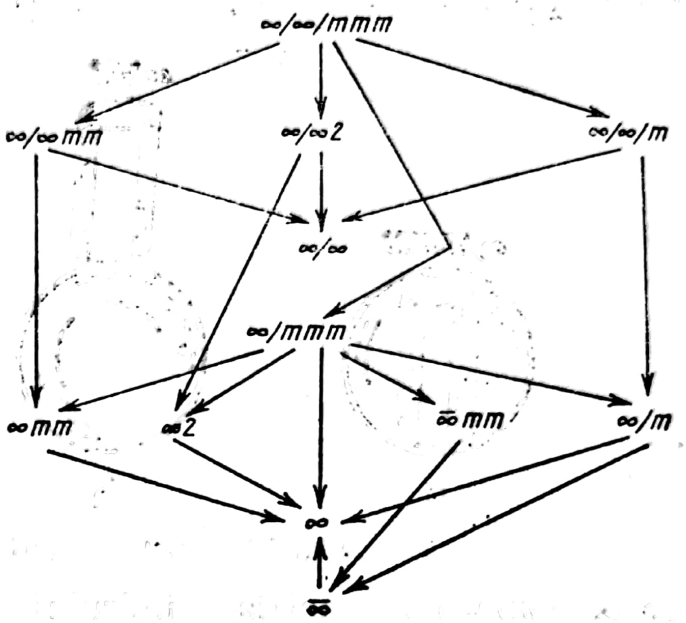


Fig. 9. Subordonarea reciprocă a grupurilor de simetrie limită şi aproape limită ale figurilor finite.

Puţin mai înainte am vorbit despre subordonarea reciprocă a grupurilor ∞/m şi $\overline{\infty}$. Subordonarea reciprocă a tuturor grupurilor limită şi aproape limită este dată în figura 9.

b) PRINCIPIUL SUPERPOZIŢIEI (COMPUNERII) SIMETRIEI (PRINCIPIUL SIMETRIEI CURIE)

Principiul superpoziţiei simetriei figurilor geometrice şi a fenomenelor fizice poate fi formulat pe scurt ca principiul conform căruia grupul de simetrie a două (sau mai multe) obiecte, luate ca întreg, este subgrupul comun de ordinul cel mai înalt al grupurilor de simetrie ale respectivelor obiecte, determinat prin luarea în considerare a poziţiei reciproce a elementelor lor de simetrie. Acest principiu, destul de evident pentru figurile geometrice, a fost extins de către P. Curie la fenomenele fizice şi a primit denumirea de *principiul simetriei Curie*. Cea mai simplă formulare a principiului superpoziţiei simetriei pentru cazul figurilor geometrice este următoarea: prin compunerea a două (sau mai multe) figuri simetrice neegale una cu cealaltă, figura rezultantă va păstra numai acele ele-

mente de simetrie care sînt comune pentru toate figurile componente, în condiţiile date de aranjare a lor în spaţiu.

Să analizăm un exemplu simplu : superpoziţia elementelor de simetrie ale sferei şi cilindrului. Simetria sferei (ca şi a sferei cu plane de simetrie ; vezi fig. 7, g) este descrisă de grupul

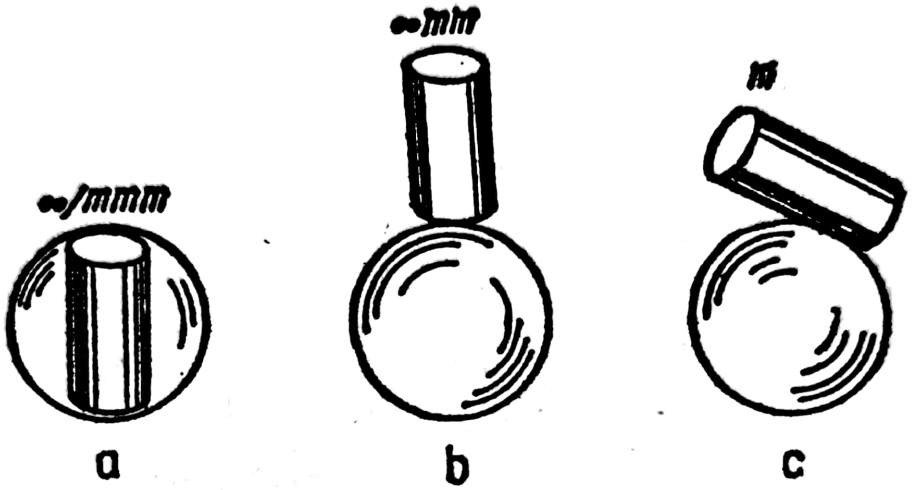


Fig. 10. Simetria figurilor compuse.

$\infty/\infty/mmm$, iar simetria cilindrului (vezi fig. 7, e) — de grupul ∞/mmm. Dacă înscriem cilindrul în sferă (fig. 10, a), atunci centrele de greutate ale celor două figuri vor coincide. Întrucît în sferă sînt conţinute toate elementele de simetrie ale cilindrului (fiecare diametru al sferei cu plane de simetrie are simetria cilindrului fix), superpoziţia elementelor de simetrie ale figurii compuse conduce la grupul de simetrie al cilindrului ∞/mmm. Acest rezultat nu este, totuşi, adevărat pentru orice orientare reciprocă a sferei şi cilindrului. Aşa, dacă cilindrul este aşezat pe sferă astfel încît axa lui să treacă prin centrul sferei (fig. 10, b), figura rezultantă va avea comune axa ∞ şi planele de simetrie care trec prin această axă, adică va avea grupul ∞mm — grupul de simetrie al conului fix (vezi fig. 7, b). În cazul cel mai general, sfera şi cilindrul vor da prin compunere grupul m (fig. 10, c).

Folosirea principiului superpoziţiei cere luarea în considerare riguros a tuturor elementelor de simetrie ale figurilor. Astfel, de exemplu, axele 4 ale cubului sînt nu numai axe de rotaţie, ci şi de oglindire ($\bar{4}$). Aceasta înseamnă că dacă compunem axa 4 a cubului cu axa $\bar{4}$ a altei figuri, figura rezultantă va avea de asemenea o axă $\bar{4}$ (fig. 11 ; celelalte elemente de simetrie ale acestei figuri pur şi simplu nu se iau în considerare).

Scanned with OKEN Scanner

Trebuie atrasă atenţia asupra faptului că prin superpoziţie grupul de simetrie al figurii compuse este cel *mai înalt* subgrup comun al grupurilor componente. Astfel, simetria figurii din fig. 10, b este descrisă de grupul ∞mm. Acesta este grupul comun cel mai înalt pentru sferă şi cilindru în aranjamentul dat. Figura respectivă are, totuşi, ca subgrupuri şi grupurile ∞, 9, 7, 2,..., dar acestea nu reprezintă subgrupul comun cel mai înalt şi nu ele descriu simetria figurii compuse. Menţionăm, de asemenea, că figura compusă nu poate avea un grup de simetrie de ordin mai înalt decît simetria aceleia dintre figurile iniţiale care are ordinul de simetrie cel mai mic. Astfel, subgrupul cel mai înalt al figurii compuse nu poate fi de ordin mai mare decît acest grup de simetrie.

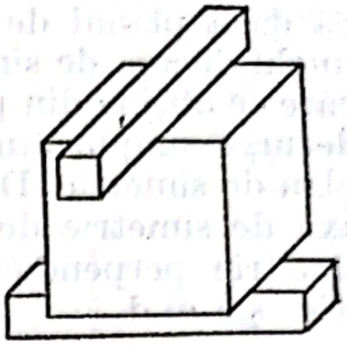


Fig. 11. Compunerea (superpoziţia) elementelor de simetrie a două figuri fiecare avînd simetria $\bar{4}$. (Cele două paralelipipede aşezate ca în figură au o axă de simetrie $\bar{4}$ şi se consideră ca o singură figură).

Subliniem că principiul compunerii (superpoziţiei) simetriei se aplică, în general, pentru figuri neegale (neidentice). A-l generaliza pentru cazul figurilor egale nu are sens, întrucît completările ce i-ar fi aduse ar cuprinde tot ce se cunoaşte despre simetrie, subînţelegînd, în particular, şi creşterea ordinului simetriei, cu alte cuvinte cazul în care simetria figurii compuse este mai înaltă decît simetria figurilor componente.

După cum s-a arătat, principiul compunerii simetriei poate fi aplicat nu numai la figuri geometrice, ci şi la fenomene fizice (vezi cap. 3). În acest caz trebuie studiată superpoziţia elementelor de simetrie ale suprafeţelor care descriu respectivele fenomene fizice. Principiul compunerii simetriei poate fi folosit şi la studiul unor mărimi matematice, ca tensori, spinori, vectori, scalari (vezi § 1.4).

1.3. GRUPURILE DE SIMETRIE ALE FIGURILOR TRIDIMENSIONALE DE DIMENSIUNI FINITE. GRUPURILE CRISTALOGRAFICE

a) GRUPURILE DE SIMETRIE ALE FIGURILOR DE DIMENSIUNI FINITE

În cele ce urmează nu va fi nevoie să dăm deducerea grupurilor menţionate. În ultimă instanţă, aceasta se reduce la alegerea variantelor posibile de combinare a elementelor de simetrie,

Scanned with OKEN Scanner

care satisfac postulatele de grup date în § 1.1, ceea ce conduce la evidenţierea unei serii de particularităţi ale combinaţiilor cîtorva elemente de simetrie. Astfel, se poate arăta cu uşurinţă că dacă planul de simetrie m este intersectat sub un anumit unghi de axa de simetrie n, trebuie să existe şi o a doua axă n' care se obţine din prima printr-o oglindire în planul m. Aceasta decurge simplu din proprietăţile operaţiei de reflectare într-un plan de simetrie. De asemenea, nu este greu de văzut că dacă o axă de simetrie de ordin par este intersectată de un plan de simetrie perpendicular, figura va avea un centru de simetrie ş.a.m.d.

Pentru figuri neizometrice, adică figuri care au diferite direcţii sau plane, ordinul uneia dintre axe poate fi, în general, oricît de înalt. Aceasta se poate vedea pe exemplul grupurilor de simetrie ale piramidelor şi prismelor (vezi fig. 5 şi 6). La figurile izometrice există totdeauna mai mult de o singură axă de ordin mai înalt decît doi. Combinaţiile posibile de asemenea axe sînt determinate de geometria sferei * şi, în particular, de cunoscuta ipoteză că suma unghiurilor unui triunghi sferic trebuie să fie mai mare decît 180° şi mai mică decît 540°. În acest caz sînt posibile triunghiurile care au următoarele unghiuri

90°	60°	60°
90°	60°	45°
90°	60°	36°

care determină poliedre regulate descrise de grupurile de simetrie $m5m$, 532, $m3m$, 432, $\bar{4}3m$, $m3$ şi 23. Datele referitoare la simetria poliedrelor descrise de aceste grupuri sînt cuprinse în tabelul 1, iar în fig. 12 sînt reprezentate poliedrele înseşi. Trebuie să observăm, cu această ocazie, că pentru fiecare dintre grupuri este dat poliedrul cu numărul cel mai mare posibil de feţe. Astfel, poliedrul din fig. 12, a are 120 feţe, cel din fig. 12, b — 60 feţe ş.a.m.d. Pe lîngă aceasta, pentru fiecare dintre grupuri sînt posibile şi alte poliedre. Astfel, grupul $m3m$ din fig. 12, c reprezintă un hexaoctaedru cu 48 feţe, dar şi cubul, octaedrul şi alte cîteva figuri au simetria descrisă tot de acest grup.

---

* Problema găsirii grupurilor de simetrie care descriu figurile izometrice poate fi redusă la problema împărţirii suprafeţei sferei în triunghiuri egale.

Unele date asupra figurilor izometrice *Tabelul 1*

Grupul de simetrie	Ordinul grupului	Elementele de simetrie *	Prezența (+) sau absența (—) formelor enantiomorfe
$m5m$	120	(6) $\bar{1}0$, (10) $\bar{6}$, (15) 2, (15) m, c	—
532	60	(6) 5, (10) 3, (15) 2	+
$m3m$	48	(3) 4, (4) $\bar{6}$, (6) 2, (9) m, c	—
432	24	(3) 4, (4) 3, (6) 2	+
$\bar{4}3m$	24	(3) $\bar{4}$, (4) 3, (6) m	—
$m3$	24	(3) 2, (4) $\bar{6}$, (3) m, c	—
23	12	(3) 2, 4 (3)	+

* Numărul elementelor de simetrie comune este înscris în parantezele dinaintea simbolului care reprezintă elementul respectiv.

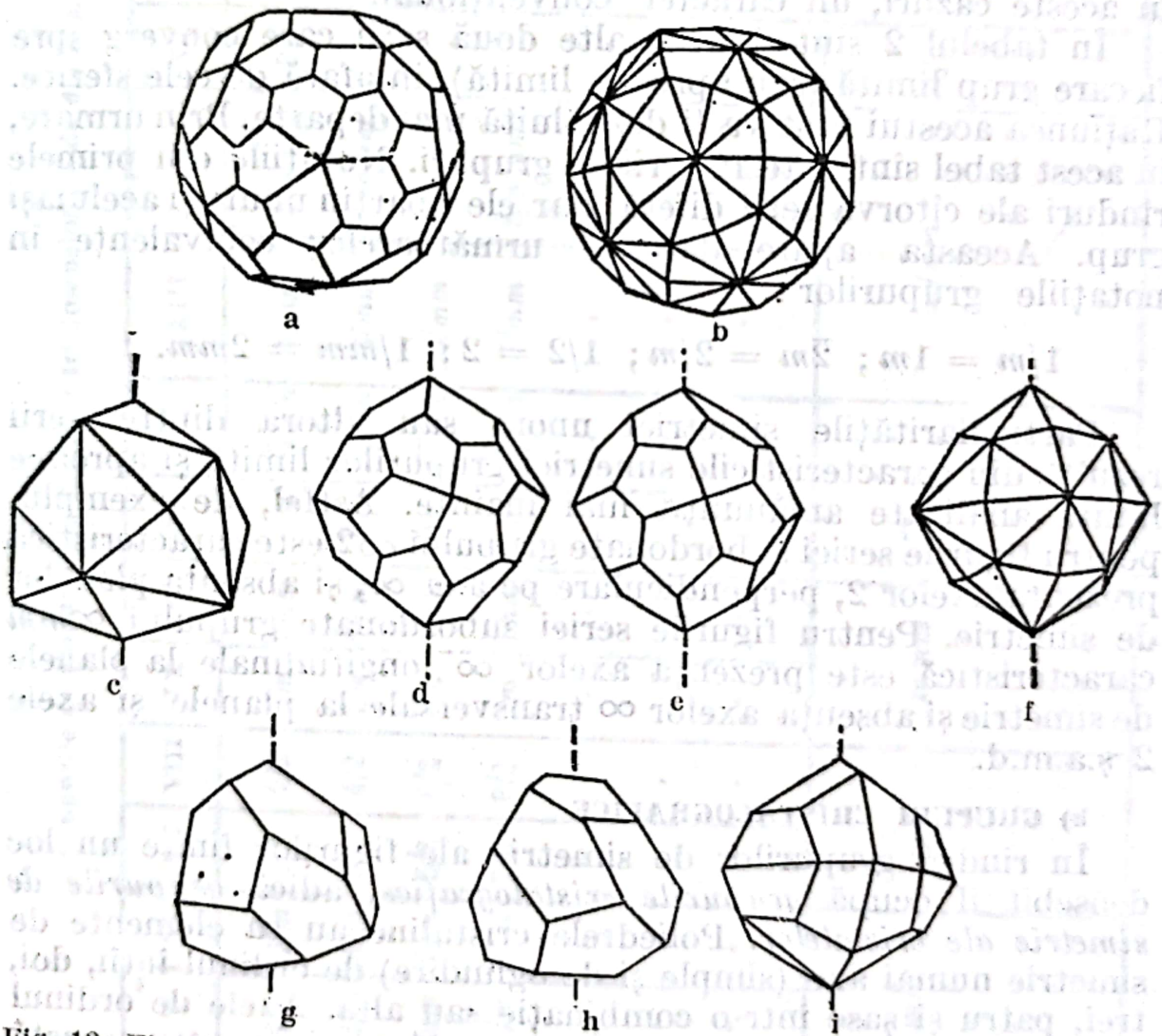


Fig. 12. Figuri care au ca elemente desimetrie cîteva axe de ordin mai mare decît doi:

a — figură aparținînd grupului $m5m$; b — una dintre figurile enantiomorfe aparținînd grupului 532; c — figură (hexaoctaedru) aparținînd grupului $m3m$; d, e — figuri enantiomorfe (pentagontrioctaedre) aparținînd grupului 432; f — figură (hexatetraedru) aparținînd grupului $\bar{4}3m$; g — figură (bidodecaedru) aparținînd grupului $m3$; h, i — figuri enantiomorfe (pentagontritetraedre) aparținînd grupului 23.

Scanned with OKEN Scanner

Fără a da toate grupurile de simetrie ale figurilor tridimensionale de dimensiuni finite, trebuie să arătăm că ele pot fi obținute cel mai simplu din grupurile limită și aproape limită (vezi fig. 7 și 8) și că sînt reprezentate sub forma unor serii care se reduc (converg spre) la aceste grupuri (tabelul 2). Seriile care converg spre grupurile ∞, ∞mm, $\infty 2$, $\overline{\infty}$, ∞/m, $\overline{\infty}mm$ și ∞/mmm sînt destul de simple și unele dintre ele au fost deja analizate mai înainte. După cum se observă, numărul grupurilor ce descriu simetria figurilor izometrice este finit și destul de mic (în total șapte grupuri) și aceste grupuri pot fi ordonate simplu după grupurile sferice limită și aproape limită corespunzătoare. Noțiunea de *serie de grupuri* are desigur, în aceste cazuri, un caracter convențional.

În tabelul 2 sînt date și alte două serii care converg spre fiecare grup limită (sau aproape limită), în afară de cele sferice. Rațiunea acestui fapt va fi dezvăluită mai departe. Prin urmare, în acest tabel sînt date 19 serii de grupuri. Notațiile din primele rînduri ale cîtorva serii diferă, dar ele aparțin unuia și aceluiași grup. Aceasta apare datorită următoarelor echivalențe în notațiile grupurilor:

$$1/m = 1m;\ \bar{2}m = 2/m;\ 1/2 = 2;\ 1/mm = 2mm.$$

Particularitățile simetriei unora sau altora dintre serii rezultă din caracteristicile simetriei grupurilor limită și aproape limită analizate amănunțit mai înainte. Astfel, de exemplu, pentru figurile seriei subordonate grupului $\infty 2$ este caracteristică prezența axelor 2, perpendiculare pe axa ∞, și absența planelor de simetrie. Pentru figurile seriei subordonate grupului ∞mm caracteristică este prezența axelor ∞ longitudinale la planele de simetrie și absența axelor ∞ transversale la planele și axele 2 ș.a.m.d.

b) GRUPURI CRISTALOGRAFICE

În rîndul grupurilor de simetrie ale figurilor finite un loc deosebit îl ocupă *grupurile cristalografice*, adică *grupurile de simetrie ale cristalelor*. Poliedrele cristaline au ca elemente de simetrie numai axe (simple și de oglindire) de ordinul întîi, doi, trei, patru și șase într-o combinație sau alta. Axele de ordinul cinci și cele mai mari de ordinul șase sînt interzise pentru această categorie de figuri, deoarece existența unor asemenea axe este incompatibilă cu noțiunea de rețea cristalină. Numărul total de grupuri cristalografice este egal cu 32 (vezi tabelul 3). Notațiile unora dintre grupurile din tabelul 3 diferă de notațiile folosite

Scanned with OKEN Scanner

Grupurile de simetrie ale figurilor tridimensionale de dimensiuni finite

I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	XI	XII	XIII	XIV	XV	XVI	XVII	XVIII	XIX
1	2	$\bar{2}$	$\bar{4}$	1/*m*	2/*m*	1/2	2/2	1*m*	2*mm*	$\bar{2}m$	$\bar{4}mm$	1/*mm*	2/*mmm*	23	*m*3	432	$\bar{4}3m$	*m*3*m*
3	4	$\bar{6}$	$\bar{8}$	3/*m*	4/*m*	3/2	4/2	3*m*	4*mm*	$\bar{6}m$	$\bar{8}mm$	3/*mm*	4/*mmm*			532		*m*5*m*
5	6	$\bar{10}$	$\bar{12}$	5/*m*	6/*m*	5/2	6/2	5*m*	6*mm*	$\bar{10}m$	$\bar{12}mm$	5/*mm*	6/*mmm*					
7	8	$\bar{14}$	$\bar{16}$	7/*m*	8/*m*	7/2	8/2	7*m*	8*mm*	$\bar{14}m$	$\bar{16}mm$	7/*mm*	8/*mmm*					
•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•					
•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•					
•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•					
∞		$\bar{\infty}$		∞/*m*		∞2		∞*mm*		$\bar{\infty}mm$		∞/*mmm*		∞/∞	∞/∞/*m*	∞/∞2	∞/∞*mm*	∞/∞/*mmm*

Scanned with OKEN Scanner

Tabelul 3

Grupurile de simetrie cristalografice

I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	XI	XII	XIII	XIV	XV	XVI	XVII	XVIII	XIX
1	2	$\bar{1}$	$\bar{4}$	m	$2/m$	2	222	m	$mm2$	$2/m$	$\bar{4}2m$	$mm2$	mmm	23	$m3$	432	$\bar{4}3m$	$m3m$
3	4	$\bar{3}$		$\bar{6}$	$4/m$	32	422	$3m$	$4mm$	$\bar{3}m$		$\bar{6}m2$	$4/mmm$					
	6				$6/m$		622		$6mm$				$6/mmm$					
∞		$\bar{\infty}$		∞/m		$\infty 2$		∞mm		$\bar{\infty}mm$		∞/mmm		∞/∞	$\infty/\infty/m$	$\infty/\infty 2$	$\infty/\infty mm$	$\infty/\infty/mmm$

pentru aceleași grupuri în tabelul 2. Acesta se datorește faptului că în tabelul 3 sînt date notațiile cele mai larg cunoscute, folosite în „Tabelele cristalografice internaționale". Legătura dintre notațiile tabelelor 2 și 3 se face cu ajutorul următoarelor relații (la dreapta semnului de egalitate sînt scrise notațiile din „Tabelele cristalografice internaționale"): $1/m$, $1m = m$; $\bar{2}m = 2/m$; $1/2 = 2$; $1/mm$, $2/mm = mm2$; $\bar{2} = \bar{1}$; $\bar{6} = \bar{3}$; $3/m = \bar{6}$; $\bar{4}mm = \bar{4}2m$; $2/2 = 222$; $4/2 = 422$; $\bar{6}m = \bar{3}m$; $3/2 = 32$; $3/mm = \bar{6}m2$; $2/mmm = mmm$; $6/2 = 622$.

Unele dintre relațiile date sînt consecința faptului că în „Tabelele cristaliografice internaționale" bara de deasupra cifrei se folosește pentru notarea rotațiilor cu inversiune, în timp ce în cartea prezentă (vezi § 1.1) am folosit-o pentru simbolizarea rotațiilor cu oglindire ($\bar{2} = \bar{1}$; $\bar{6} = \bar{3}$; $3/m = \bar{6}$ etc.). În aceeași ordine de idei, trebuie arătat că în cartea de față *operația de simetrie* corespunzătoare rotației de 180° cu oglindire, de exemplu, se va nota cu simbolul $\bar{2}$, în timp ce *grupul de simetrie* al cristalului, care are (în afară de operația 1) numai această operație $\bar{2} = c$, se va nota cu $\bar{1}$.

În tabelul 4 sînt enumerate operațiile de simetrie pentru toate grupurile cristalografice. Trebuie, totuși, să remarcăm faptul că nu toate aceste grupuri sînt diferite în sensul deplin al cuvîntului „grup": o parte dintre ele sînt *izomorfe* între ele. Două grupuri de același ordin se numesc izomorfe dacă între elementele (operațiile) lor există o corespondență univocă și reciprocă, astfel încît produsului oricăror două elemente dintr-un grup să-i corespundă produsul a două elemente determinate din cel de-al doilea grup.

Asemănarea, izomorfismul, nediferențierea de grup a unor grupuri se pot înțelege analizînd mai întîi asemănarea unor elemente din interiorul unui grup. Asemănarea elementelor dintr-un grup se stabilește cu ajutorul noțiunii de *elemente* (operații) *conjugate*. Să presupunem că s și t sînt două elemente ale grupului analizat. Elementul $u = t^{-1}st$ este, de asemenea, un element al grupului și se numește element conjugat al lui s prin intermediul elementului t. Mulțimea completă a diferitelor elemente care sînt conjugate lui s prin intermediul tuturor elementelor grupului G formează *clasa conjugată* a acestui grup. Numărul elementelor unei clase se numește *ordin* al clasei; ordinul clasei conjugate este un divizor al ordinului grupului.

Să analizăm un exemplu simplu. Elementele grupului 622 sînt 1, 2, 3, 3^{-1}, 6, 6^{-1}, $2'$, $2'$, $2'$, $2''$, $2''$, $2''$ (vezi tabelul 4). Dacă se ia ca element t operația 6, iar ca element s operația $2'$,

Scanned with OKEN Scanner

Tabelul 4

Operațiile de simetrie și clasele de elemente conjugate ale grupurilor cristalografice

Nr. crt.	Grupul de simetrie	Operațiile de simetrie și clasele conjugate (ultimele sînt separate prin punct și virgulă)	Numărul claselor conjugate care au ordinul						Ordinul grupului
			1	2	3	4	6	8	
1	1	1 ;	1						1
2	$\bar{1}$	1 ; c	2						2
3	2	1 ; 2	2						2
4	m	1 ; m	2						2
5	$2/m$	1 ; 2 ; m ; c	4						4
6	222	1 ; 2 ; 2′ ; 2″	4						4
7	$mm2$	1 ; 2 ; m' ; m''	4						4
8	mmm	1 ; 2 ; 2′ ; 2″ ; m ; m' ; m'' ; c	8						8
9	4	1 ; 2 ; 4 ; 4^{-1}	4						4
10	$\bar{4}$	1 ; 2 ; $\bar{4}$; $\bar{4}^{-1}$	4						4
11	422	1 ; 2 ; 4, 4^{-1} ; 2′, 2′ ; 2″, 2″	2	3					8
12	$4mm$	1 ; 2 ; 4, 4^{-1} ; m, m ; m', m'	2	3					8
13	$4/m$	1 ; 2 ; c ; m ; $\bar{4}$; $\bar{4}^{-1}$; 4 ; 4^{-1}	8						8
14	$\bar{4}2m$	1 ; 2 ; $\bar{4}$, $\bar{4}^{-1}$; 2′, 2′ ; m, m	2	3					8
15	$4/mmm$	1 ; 2 ; c ; m ; 4, 4^{-1} ; $\bar{4}$, $\bar{4}^{-1}$; 2′, 2′ ; 2″, 2″ ; m', m' ; m'', m''	4	6					16
16	3	1 ; 3 ; 3^{-1}	3						3
17	$\bar{3}$	1 ; c ; 3 ; 3^{-1} ; $\bar{6}$; $\bar{6}^{-1}$	6						6
18	32	1 ; 3, 3^{-1} ; 2, 2, 2	1	1	1				6
19	$3m$	1 ; 3, 3^{-1} ; m, m, m	1	1	1				6

Scanned with OKEN Scanner

Tabelul 4 (continuare)

Nr. crt.	Grupul de simetrie	Operațiile de simetrie și clasele conjugate (ultimele sînt separate prin punct și virgulă)	Numărul claselor conjugate care au ordinul						Ordinul grupului
			1	2	3	4	6	8	
20	$\bar{3}m$	$1\,;\ c\,;\ 3,\ 3^{-1}\,;\ \bar{6},\ \bar{6}^{-1}\,;\ m,\ m,\ m\,;\ 2,\ 2,\ 2$	2	2	2				12
21	6	$1\,;\ 2\,;\ 3\,;\ 3^{-1}\,;\ 6\,;\ 6^{-1}$	6						6
22	$\bar{6}$	$1\,;\ 2\,;\ 3\,;\ 3^{-1}\,;\ \bar{3}\,;\ \bar{3}^{-1}$	6						6
23	622	$1\,;\ 2\,;\ 3,\ 3^{-1}\,;\ 6,\ 6^{-1}\,;\ 2',\ 2',\ 2'\,;\ 2'',\ 2''\,;\ 2''$	2	2	2				12
24	6*mm*	$1\,;\ 2\,;\ 3,\ 3^{-1}\,;\ 6,\ 6^{-1}\,;\ m,\ m,\ m\,;\ m',\ m',\ m'$	2	2	2				12
25	6/*m*	$1\,;\ 2\,;\ m\,;\ c\,;\ 3\,;\ 3^{-1}\,;\ 6\,;\ 6^{-1}\,;\ \bar{3}\,;\ \bar{3}^{-1}\,;\ \bar{6}\,;\ \bar{6}^{-1}$	12						12
26	$\bar{6}m2$	$1\,;\ m\,;\ \bar{3},\ \bar{3}^{-1}\,;\ 3,\ 3^{-1}\,;\ 2,\ 2,\ 2\,;\ m',\ m',\ m'$	2	2	2				12
27	6/*mmm*	$1\,;\ c\,;\ m\,;\ 2\,;\ 6,\ 6^{-1}\,;\ 3,\ 3^{-1}\,;\ \bar{6},\ \bar{6}^{-1}\,;\ \bar{3},\ \bar{3}^{-1}\,;\ 2',\ 2',\ 2'\,;\ 2'',\ 2'',\ 2''\,;\ m',\ m',\ m'\,;\ m'',\ m'',\ m''$	4	4	4				24
28	23	$1\,;\ 2,\ 2,\ 2\,;\ 3,\ 3,\ 3,\ 3\,;\ 3^{-1},\ 3^{-1},\ 3^{-1},\ 3^{-1}$	1		1	2			12
29	432	$1\,;\ 2,\ 2,\ 2\,;\ 4,\ 4,\ 4,\ 4^{-1},\ 4^{-1},\ 4^{-1}\,;\ 3,\ 3,\ 3,\ 3,\ 3^{-1},\ 3^{-1},\ 3^{-1},\ 3^{-1}\,;\ 2',\ 2',\ 2',\ 2',\ 2',\ 2'$	1		1		2	1	24
30	$\bar{4}3m$	$1\,;\ 2,\ 2,\ 2\,;\ \bar{4},\ \bar{4},\ \bar{4},\ \bar{4}^{-1},\ \bar{4}^{-1},\ \bar{4}^{-1}\,;\ 3,\ 3,\ 3,\ 3,\ 3^{-1},\ 3^{-1},\ 3^{-1},\ 3^{-1}\,;\ m,\ m,\ m,\ m,\ m,\ m$	1		1		2	1	24
31	*m*3	$1\,;\ c\,;\ 2,\ 2,\ 2\,;\ m,\ m,\ m\,;\ 3,\ 3,\ 3,\ 3\,;\ 3^{-1},\ 3^{-1},\ 3^{-1},\ 3^{-1}\,;\ \bar{6},\ \bar{6},\ \bar{6},\ \bar{6}\,;\ \bar{6}^{-1},\ \bar{6}^{-1},\ \bar{6}^{-1},\ \bar{6}^{-1}$	2		2	4			24
32	*m*3*m*	$1\,;\ c\,;\ 2,\ 2,\ 2\,;\ 4,\ 4,\ 4,\ 4^{-1},\ 4^{-1},\ 4^{-1}\,;\ m,\ m,\ m\,;\ \bar{4},\ \bar{4},\ \bar{4},\ \bar{4}^{-1},\ \bar{4}^{-1},\ \bar{4}^{-1}\,;\ 3,\ 3,\ 3,\ 3,\ 3^{-1},\ 3^{-1},\ 3^{-1},\ 3^{-1}\,;\ \bar{6},\ \bar{6},\ \bar{6},\ \bar{6},\ \bar{6}^{-1},\ \bar{6}^{-1},\ \bar{6}^{-1},\ \bar{6}^{-1}\,;\ 2',\ 2',\ 2',\ 2',\ 2',\ 2'\,;\ m',\ m',\ m',\ m',\ m'\ m',$	2		2		4	2	48

Scanned with OKEN Scanner

atunci obținem încă două elemente 2′, care formează împreună cu clasa inițială ordinul trei. Într-adevăr, rotind figura în jurul axei 6 cu 60° spre stînga (t^{-1}), inversînd axa ei 2 (s) și rotind la dreapta cu 60° (t) obținem elementul de simetrie 2′, conjugat cu cel inițial. Analizînd figura descrisă de grupul 622 se constată ușor că axele 2′ sînt asemenea între ele — ele efectuează transformări de unul și același fel. Faptul că elementele 2′ din acest grup sînt conjugate reprezintă tocmai expresia acestei asemănări, în limbajul teoriei grupurilor. Grupul 622 are ordinul 12, iar clasa elementelor 2′ are ordinul 2. Și, într-adevăr, acest ordin este un divizor al ordinului grupului. Luînd ca elemente inițiale $s = 2''$, $t = 6$ obținem încă o clasă de elemente conjugate ale acestui grup — clasa compusă din trei elemente 2″, 2″, 2″ ș.a.m.d. Interesant este că elementele 2′, 2′, 2′ și 2″, 2″, 2″ au același ordin, dar aparțin unor clase conjugate diferite. Din punct de vedere geometric aceasta decurge din faptul că într-un caz rotația (inversarea) prismei (care are grupul de simetrie 622) se face în jurul axei care trece printr-o *muchie* a prismei, iar în celălalt — în jurul unei axe perpendiculare pe fețele prismei. În total în grupul 622 există șase clase de elemente conjugate. Clasele de elemente conjugate din tabelul 4 sînt reunite în diferite grupări.

Evident, vor fi izomorfe grupurile care au aceleași clase de elemente conjugate, chiar dacă aceste clase sînt formate din elemente de altă natură (dar, desigur, care au același ordin). Astfel, de exemplu, grupurile 622 și $6mm$ sînt izomorfe. În acest caz, clasele abia analizate 2′, 2′, 2′ și 2″, 2″, 2″ din grupul 622 sînt echivalente cu operații (de asemenea de ordinul doi) de reflexie în planele m'; m', m' și m'', m'', m''.

În tabelul 4 este dată, pentru toate clasele, împărțirea elementelor de simetrie ale grupurilor în clase de elemente conjugate. Din tabel se observă că cele 32 grupuri cristalografice se grupează în 18 grupuri care diferă în mod abstract. Numai grupurile 1, 3, mmm, $4/m$, $4/mmm$, $6/m$, $6/mmm$, 23, $m3$ și $m3m$ au cîte un singur reprezentant. Grupurile izomorfe se completează în felul următor: a), 2, m, $\bar{1}$; b) 222, $2/m$, $mm2$; c) 4, $\bar{4}$; d) 6, $\bar{3}$, $\bar{6}$; e) 32, $3m$; f) 422, $4mm$, $\bar{4}2m$; g) 622, $6mm$; $\bar{3}m$, $\bar{6}m2$; h) 432, $\bar{4}3m$. Din tabel se vede că ordinul unui grup este egal cu suma ordinelor tuturor claselor sale de elemente conjugate. De exemplu, pentru clasa 422 ordinul grupului este egal cu 8 și reprezintă suma elementelor seriei: $(2 \times 1) + (3 \times 2)$.

Nediferențiabilitatea abstractă a unor grupuri cristalografice nu înseamnă că cristalele descrise de ele au aceleași proprie-

Scanned with OKEN Scanner

tăți. Astfel, grupurile 2, $\bar{1}$ și *m* sînt nediferențiable din punct de vedere abstrac, dar proprietățile cristalelor care aparțin acstor grupuri sînt diferite (vezi cap. 3). În legătură cu aceasta vor fi analizate în continuare mai întîi toate cele 32 grupuri cristalografice.

Totalitatea cristalelor care aparțin unuia și aceluiași grup de simetrie formează o clasă *cristalografică* (cristalină). În cazurile în care este vorba despre simetrie, clasele de cristale se vor nota cu simboluri corespunzătoare grupurilor lor de simetrie.

Totalitatea particulelor care compun un cristal formează o rețea spațială. Pentru fiecare tip de rețea poate fi ales un *paralelipiped de bază* cu muchiile egale cu cele mai scurte translații cu ajutorul cărora se poate construi rețeaua. Orice rețea tridimensională, deci și paralelipipedul ei de bază, este caracterizată prin șase parametri : trei translații fundamentale după axele *a*, *b*, și *c*, notate cu aceleași litere, și cele trei unghiuri α, β, γ dintre axele *b* și *c*, *c* și *a*, *a* și *b* respectiv. Conform celor de mai sus, pentru orice cristal pot exista șase sisteme de coordonate cristaline, numite *singonii*. Una dintre aceste singonii — cea *hexagonală* — poate fi împărțită în două : *hexagonală* propriu-zisă și *romboedrică*. Această împărțire se face pe baza faptului că cristalele hexagonale și romboedrice au rețele primitive Bravais diferite. Împărțirea cristalelor în clase pe baza rețelelor Bravais diferite conduce la clasificarea lor în *șapte sisteme cristalografice*.

Clasificarea cristalelor după singonii și sisteme, cu indicarea parametrilor paralelipipedului fundamental, a denumirilor claselor, a alegerii elementelor de simetrie și a notațiilor diferite ale grupurilor de simetrie este dată în tabelul 5. În acest tabel, în formulele de simetrie sînt date numai elementele fundamentale ale simetriei cristalelor din diferitele clase. Astfel, în tabel nu se indică elementul de simetrie 1, care este subînțeles la toate clasele. În cazurile în care este dată o axă de ordin mare, axa subordonată ei, de ordin mai mic (coincizînd în direcție cu prima), nu se mai indică. Numărul axelor și al planelor este scris în paranteze în formulele de simetrie. Pe lîngă notațiile grupurilor din „Tabelele cristalografice internaționale" (care vor fi utilizate în cele ce urmează pentru notarea grupurilor cristalografice), în tabel mai sînt date și notațiile după Schönfliess, care se folosesc pînă în prezent.

În cazul general, într-un cristal real ca axe de coordonate se pot lua trei muchii care pleacă din același punct, determinînd

Scanned with OKEN Scanner

Tabelul 5

Sistemele cristalografice şi singoniile

Singonia şi constantele paralelipipedului ei de bază	Sistemul	Numărul clasei	Denumirea clasei	Formula elementelor de simetrie	Notaţii	
					După Schönfliess	După Tabelele cristalografice internaţionale
Triclinică $a \neq b \neq c$; $\alpha \neq \beta \neq \gamma$	Triclinic	1	Monoedrică	1	C_1	1
		2	Pinacoidală	$\bar{2}$	$C_i = S_2$	$\bar{1}$
Monoclinică $a \neq b \neq c$; $\alpha = \beta = 90°$, $\beta \neq 90°$	Monoclinic	3	Axial-diedrică	2	C_2	2
		4	Neaxial-diedrică	m	$C_{1h} = C_s$	m
		5	Prismatică	2, m, c	C_{2h}	$2/m$
Rombică $a \neq b \neq \neq c$; $\alpha = \beta = \gamma = 90°$	Rombic	6	Rombo-tetraedrică	(3) 2	$D_2 = V$	222
		7	Rombo-piramidală	2, (2) m	C_{2v}	$mm2$
		8	Rombo-bipiramidală	(3)2, (3)m, c	$D_{2h} = V_h$	mmm
Tetragonală $a = b \neq c$; $\alpha = \beta = \gamma = 90°$	Tetragonal	9	Tetragonal-piramidală	4	C_4	4
		10	Tetragonal-tetraedrică	$\bar{4}$	S_4	$\bar{4}$
		11	Tetragonal-trapezoiedrică	4, (4)2	D_4	422
		12	Bitetragonal-piramidală	4, (4)m	C_{4v}	$4mm$
		13	Tetragonal-bipiramidală	4, m, c	C_{4h}	$4/m$
		14	Tetragonal-scalenoedrică	$\bar{4}$, (2)2, (2) m	$D_{2d} = V_d$	$\bar{4}2m$
		15	Bitetragonal-bipiramidală	4, (4)2, (5) m, c	D_{4h}	$4/mm$

Scanned with OKEN Scanner

Hexagonală $a = b \neq c$; $\alpha = \beta = 90°$ $\gamma = 120°$	Romboedric	16	Trigonal-piramidală	3	C_3	3
		17	Romboedrică	$\bar{6}$, c	$C_{3i} = S_6$	$\bar{3}$
		18	Trigonal-trapezoidală	3, (3)2	D_3	32
		19	Bitrigonal-piramidală	3, (3)m	C_{3v}	3m
		20	Bitrigonal-scalenoedrică	$\bar{6}$, (3)2, (3) m, c	D_{3d}	$\bar{3}m$
	Hexagonală	21	Hexagonal-piramidală	6	C_6	6
		22	Trigonal-bipiramidală	3, m	C_{3h}	$\bar{6}$
		23	Hexagonal-trapezoidală	6, (6)2	D_6	622
		24	Bihexagonal-piramidală	6, (6)m	C_{6v}	6mm
		25	Hexagonal-bipiramidală	6, m, c	C_{6h}	6/m
		26	Bitrigonal-piramidală	3, (3)2, (4)m	D_{3h}	$\bar{6}m2$
		27	Bihexagonal-bipiramidală	6, (6)2, (7)m, c	D_{6h}	6/mmm
Cubică $a = b = c$; $\alpha = \beta = \gamma = 90°$	Cubic	28	Tritetraedrică	(3)2, (4)3	T	23
		29	Trioctaedrică	(3)4, (4)3, (6)2	O	432
		30	Hexatetraedrică	(3)$\bar{4}$, (4)3, (6)m	T_d	$\bar{4}3m$
		31	Bidocaedrică	(3)2, (4)$\bar{6}$, (3)m, c	T_h	$m3$
		32	Hexoactaedrică	(3)4, (4)$\bar{6}$, (6)2, (9)m, c	O_h	$m3m$

Scanned with OKEN Scanner

așa numitele *axe cristalografice* a, b și c. La alegerea axelor cristalografice trebuie să se țină seama de anumite reguli, care să limiteze arbitrarul la minimum posibil. Corect este să se determine sistemul cristalografic, cu alte cuvinte să se clasifice cristalul. În tabelul 6 sînt date regulile unanim admise pentru stabilirea tipului de cristale ale tuturor singoniilor.

Pe lîngă sistemul de coordonate cristalografice, care nu este ortogonal pentru toate cristalele, pentru descrierea proprietăților fizice ale fiecărei clase de cristale se consideră sistemul de coordonate *cristalofizic*, ortogonal, propriu. Axele acestui sistem se notează cu literele X, Y, Z. Regulile de alegere a axelor în sistemul cristalofizic sînt date, de asemenea, în tabelul 6.

În acest tabel, pentru singonia hexagonală se utilizează o rețea (un „aranjament") cu patru axe a, b, u, c — denumită rețea Bravais. Pentru cristalele sistemului romboedric se folosește uneori altă rețea — cea dată de Miller. Drept axe a, b și c se ia în acest caz un terțet de muchii ale romboedrului (sau piramidei) între care este inclusă axa $\bar{6}$ (sau axa 3). În cazul sistemului cristalofizic, axa $\bar{6}$ (3) se consideră axă Z, una dintre proiecțiile axelor Miller pe planul bazei (plan perpendicular pe axa Z) se ia drept axă X, iar axa Y se alege în așa fel încît sistemul în ansamblu să fie drept (dextrogir) și ortogonal (fig. 13).

Se pot pune condiții determinate la alegerea sensurilor pozitive ale axelor în cristale. De exemplu, cînd se studiază proprietățile electrice ale cristalelor piroelectrice, sensul pozitiv al axei ce coincide cu axa polară se recomandă să se aleagă sensul din care apar sarcinile pozitive la încălzirea cristalului.

Alegerea sistemului de coordonate cristalografic determină și alegerea așa-numitului plan cristalin (nodal) *unitate*, care este un plan diagonal al paralelipipedului de bază al rețelei.

Mărimi importante în cristalografie sînt rapoartele dintre segmentele unitate a, b, c care determină planul unitate. Poziția (orientarea) oricărui plan (fețe) al cristalului se poate găsi examinînd, de exemplu, rapoartele dintre segmentele unitate a, b, c și mărimile segmentelor A, B, C, determinate de intersecțiile planului cristalin cu cele trei axe (fig. 14) : $(a/A) : (b/B) : (/C)$.

În aceste fracții numărătorii sînt egali cu segmentele unitate, iar numitorii trebuie să fie numere întregi (parametri numerici), întrucît orice plan cristalin intersectează axele de coordonate fie la un număr întreg de segmente unitate, fie — în cazul unei translații — planul poate fi adus într-o asemenea poziție încît să treacă prin trei noduri. De aici rezultă că raportul menționat

Scanned with OKEN Scanner

Indicații asupra determinării tipului cristalului

Singonia	Alegerea axelor cristaline	Orientarea axelor	
		Cristalografice	Cristalofizice
Cubică	Trei axe patru de simetrie, reciproc perpendiculare (în clasele $m3m$ și 432) sau doi (în restul claselor). Dintre ele, oricare, pot fi considerate axă X, Y sau Z	c — verticală b — de la stînga la dreapta a — spre observator	$c \mathrel{\hat{=}} Z$ $b \mathrel{\hat{=}} Y$ $a \mathrel{\hat{=}} X$
Tetragonală	Axa principală (4 sau $\bar{4}$) se consideră axă c. Cele două axe doi sînt a și b; dacă nu există axe doi, atunci se iau direcțiile corespunzătoare lor	c — verticală b — de la stînga la dreapta a — spre observator uniform divergente	$c \mathrel{\hat{=}} Z$ $b \mathrel{\hat{=}} Y$ $a \mathrel{\hat{=}} X$
Hexagonală	Axele principale (6, 3, $\bar{6}$) se consideră axă c. Axele doi — a, b și u; dacă nu sînt axe doi, se co nsideră direcțiile corespunzătoare lor	c — verticală a și u — spre observator b — de la stînga la dreapta	$c \mathrel{\hat{=}} Z$ $a \mathrel{\hat{=}} X$ $Y \perp X, Z$
Rombică	Oricare dintre cele trei axe de simetrie doi poate fi considerată axă a, b sau c. În clasa $mm2$, axa 2 se consideră axă c; drept axe a și b se iau normalele la m	c — verticală b — de la stînga la dreapta a — spre observator oblic	$c \mathrel{\hat{=}} Z$ $b \mathrel{\hat{=}} Y$ $a \mathrel{\hat{=}} Z$
Monoclinică	Axa de simetrie doi sau normala la m (în clasa m) se consideră axă b; axele a și c se iau în direcțiile celorlalte două muchii, perpendiculare pe b	c — verticală b — de la stînga la dreapta a — spre observator	$c \mathrel{\hat{=}} X$ $b \mathrel{\hat{=}} Z$ $a \mathrel{\hat{=}} Y$
Triclinică	Direcțiile oricăreia dintre cele trei muchii, nesituate în același plan, se iau drept axe a, b și c	c — verticală b — de la stînga la dreapta a — spre observator	Alegerea axelor X, Y și Z este arbitrară

Scanned with OKEN Scanner

$(a/A) : (b/B) : (c/C)$ poate fi exprimat totdeauna prin raportul a trei numere întregi : $(a/A) : (b/B) : (c/C) = h : k : l$.

Astfel, cele trei numere h, k, l determină poziția oricărui plan al cristalului ; de obicei ele se numesc *indici Miller*. Indicii Miller se scriu în paranteze rotunde cînd este vorba despre plane cristaline. De exemplu, pentru planul unitate avem (111).

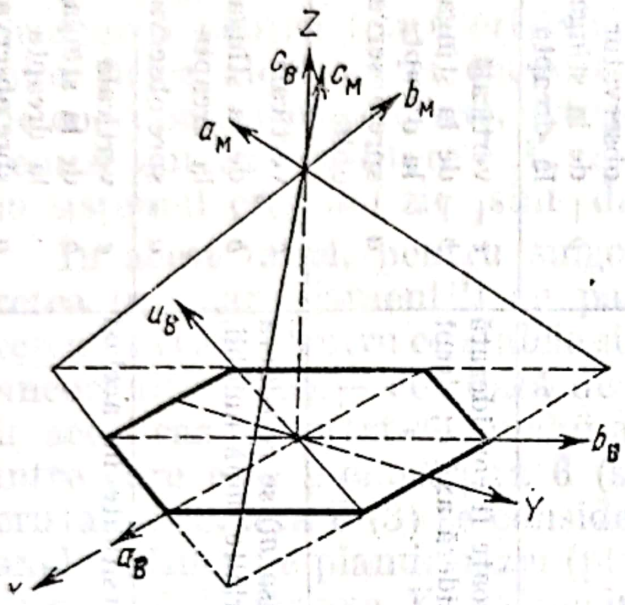


Fig. 13. Construcții Bravais și Miller pentru cristale hexagonale și romboedrice :

a_B, b_B, u_B, c_B — axele de coordonate în reprezentarea Bravais ; a_M, b_M, c_M — axele de coordonate în reprezentare Miller ; X, Y, Z — axele cristalografice fizice.

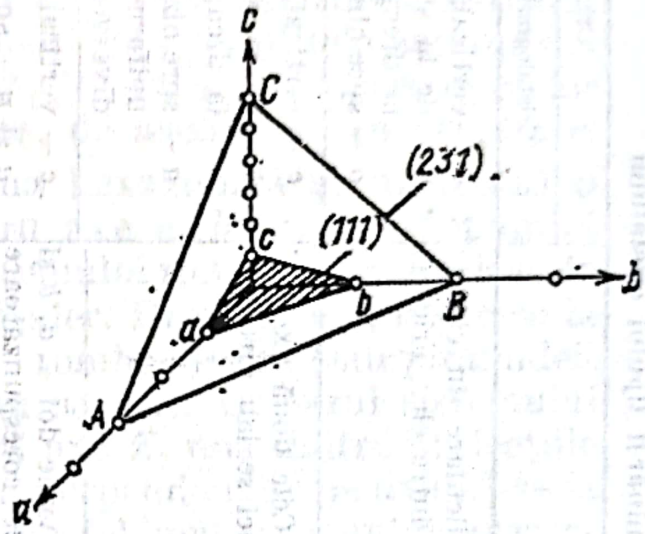


Fig. 14. Fața unitate (111) și fața cu indicii (231) într-un cristal rombic.

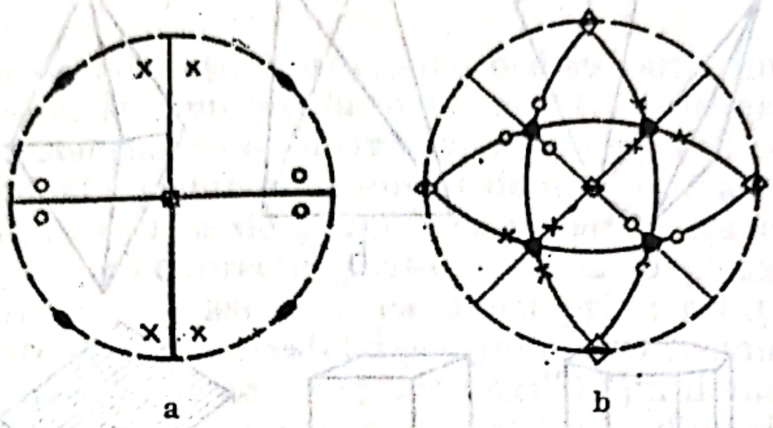
Indicii Miller pot fi atît pozitivi, cît și negativi. În ultimul caz deasupra lor se pune semnul minus. Din definiția indicilor, Miller rezultă că dacă un plan cristalin (o față a cristalului) este paralel cu o axă cristalografică oarecare, atunci indicele acestuia după respectiva axă este egal cu zero. Notații asemănătoare indicilor Miller se pot introduce și pentru muchii. Cifrele ce reprezintă indicii se scriu în acest caz în paranteze drepte $[hkl]$.

Pentru rețeaua Bravais hexagonală suma indicilor $(h + k + l)$ este totdeauna egală cu zero. În aranjamentul Miller, planul de bază al sistemului romboedric are indicii planului unitate (111). Dăm mai jos relația dintre indicii Bravais și Miller pentru unul și același plan al cristalelor din sistemul romboedric :

$$h_B = h_M - k_M ; \quad i_B = k_M - l_M ; \quad k_B = l_M - h_M ;$$
$$l_B = h_M + k_M + l_M .$$

Scanned with OKEN Scanner

Să ne întoarcem la simetria cristalelor. Se poate obține o reprezentare intuitivă a elementelor de simetrie și a aranjării lor reciproce cu ajutorul *proiecțiilor stereografice*. În figura 15 sînt date ca exemplu proiecțiile stereografice ale elementelor de simetrie ale claselor tetragonală ($\bar{4}2m$) și cubică ($\bar{4}3m$). Aici,



a b

Fig. 15. Exemple de proiecții stereografice ale elementelor de simetrie ale claselor $\bar{4}2m$ (a) și $\bar{4}3m$ (b).

ca deobicei, planele de simetrie sînt desenate cu linii continue, iar planele de oglindire — punctat. Cu ajutorul proiecțiilor stereografice pot fi găsite ușor toate *formele simple* ale unei clase cristalografice date și indicii planelor cristaline ale formelor simple.

Formă simplă se numește o figură care conține numai plane cristaline identice. Toate planele unei figuri simple într-o proiecție stereografică se pot obține prin darea punctului de ieșire al normalei numai pentru un singur plan (notat cu cruciuliță în fig. 15, a) și multiplicarea ulterioară a acestui plan cu ajutorul elementelor de simetrie (planele situate în partea opusă a sferei sînt notate cu cercuțe). Poziția generală a unui plan cristalin corespunde cazului în care normala la plan nu coincide cu niciuna dintre axele de simetrie și nu se află în niciunul din planele de simetrie. Așa s-a ales, de exemplu, poziția planului din fig. 15, a și s-a obținut o figură simplă (scalenoedru tetragonal), cu un număr maxim (pentru această clasă) de plane cristaline (opt) ce caracterizează clasa dată, cifra fiind egală cu ordinul grupului de simetrie. Indicii unui plan oarecare se scriu (hkl); prin aceasta se subliniază faptul că segmentele de pe toate axele de coordonate diferă pentru planul considerat.

În fig. 15, b nu s-a ales un plan cristalin într-o poziție oarecare, ci planul situat într-unul dintre planele de simetrie, dar care nu coincide cu nici o axă. Indicii unui asemenea plan vor fi (hhl). Elementele de simetrie ale acestei clase multiplică planul

Scanned with OKEN Scanner

considerat şi conduc la formarea figurii simple (*hhl*), cu 12 feţe — tetragontritetraedrul. Toate formele simple ale claselor $\bar{4}2m$ şi $\bar{4}3m$ sînt date în figurile 16 şi 17. Atragem atenţia

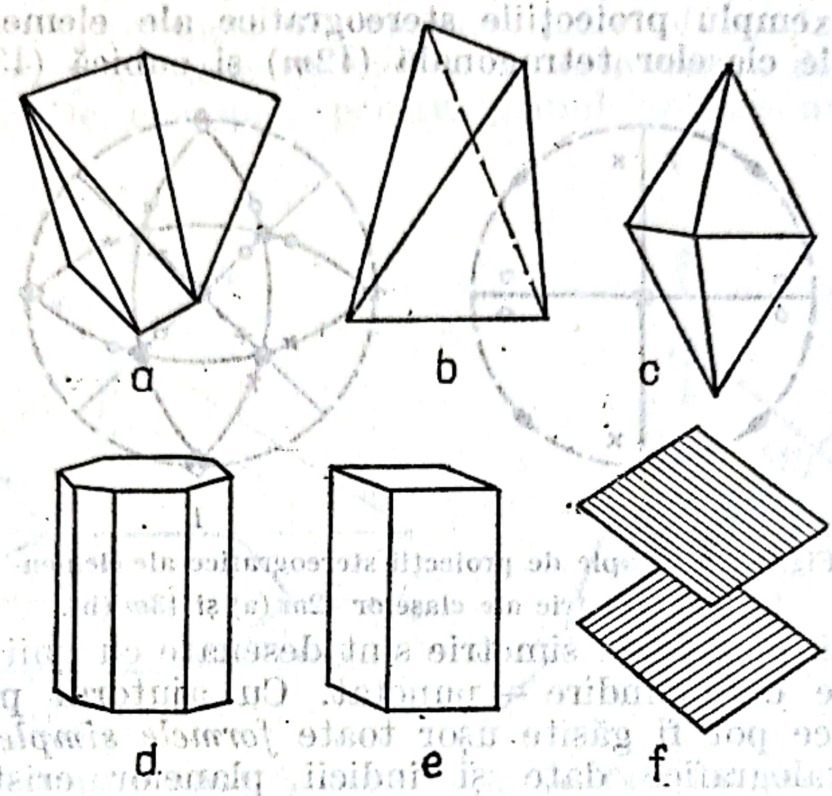


Fig. 16. Formele simple ale clasei $\bar{4}2m$;
a — scalenoedru tetragonal (*hkl*); b — tetraedru tetragonal (*hhl*); c — bipiramidă tetragonală (*h*0*l*); d — prismă bitetragonală (*hk*0); e — prismă tetragonală (110) sau (100); f — pinacoid (001).

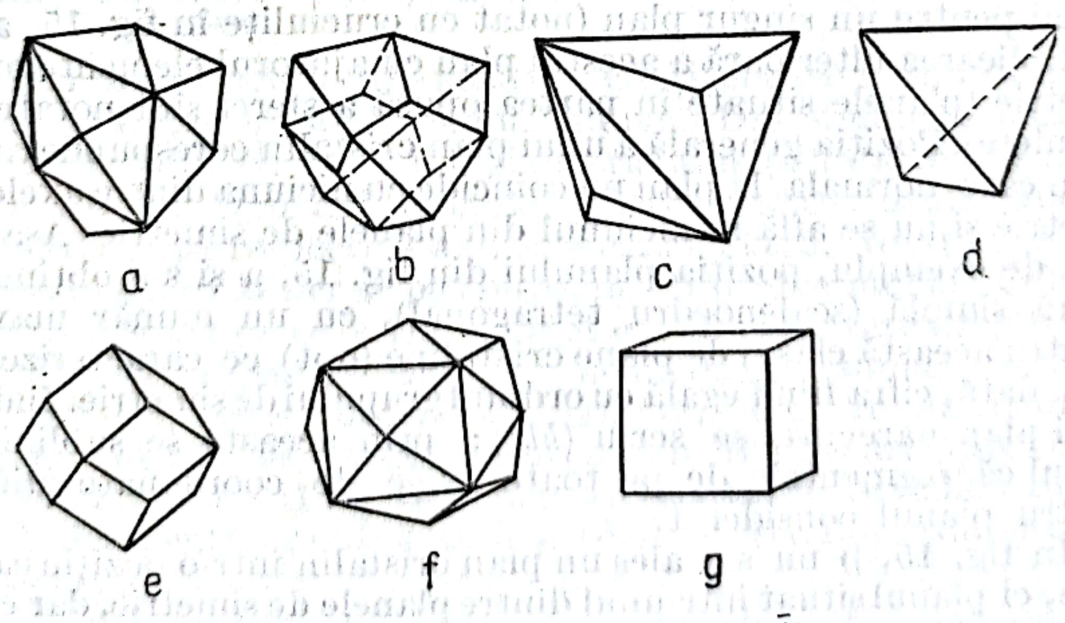


Fig. 17. Formele simple ale clasei $\bar{4}3m$:
a — hexatetraedru (*hkl*); b — tetragontritetraedru (*hhl*); c — trigontritetraedru (*hkk*); d — tetraedru (111); e — rombododecaedru (110); f — tetrahexaedru (*hk*0); — cub (hexaedru) (100).

Scanned with OKEN Scanner

că planele unui cristal real nu reprezintă, în majoritatea cazurilor, forme simple, ci combinații de forme simple.

În studiul cristalelor, mai des decît în cristalografia fizică, o deosebită însemnătate o are nu numai cunoașterea simetriei cristalului în sine, ci și simetria direcțiilor și planelor sale privilegiate.

Noțiunea de „direcție" presupune o distribuție liniară uniformă în spațiu. Într-un mediu optic neactiv izotrop (care are simetria sferei cu plane de simetrie $\infty/\infty/mmm$) o direcție oarecare, determinată printr-un segment de dreaptă, are simetria cilindrului fix, descrisă de grupul ∞/mmm*. Axa cilindrului ∞ (în acest caz orice direcție poate fi aleasă drept axă a cilindrului) se trahsformă astfel în ea însăși prin : rotații de un unghi oarecare (în jurul acestei axe) ; reflexii într-unul din planele perpendiculare pe axa ∞ ; „rerotiri" în jurul uneia dintre axele 2 perpendiculare pe axa ∞ ; rotații cu oglindiri de ordin oarecare în jurul axei 2 ; inversiuni în punctul corespunzător centrului de greutate al figurii (vezi fig. 7, e).

În felul acesta, într-un mediu optic neactiv izotrop oricare dintre direcții are simetria cea mai înaltă, descrisă de grupul ∞/mmm. Aceeastă direcție se nmește direcție *polar-tensorială* (vezi § 1.4). Delimitarea spațială unidimensionată a unei direcții concrete este determinată aici de direcția axei ∞. Rezultă că simetria unei direcții oarecare dintr-un cristal nu poate fi mai înaltă decît simetria cilindrului (segmentului de dreaptă) și va fi descrisă de un subgrup al grupului ∞/mmm. Evident, simetria tuturor direcțiilor paralele pentru un cristal, considerat ca mediu omogen, este aceeași.

Subgrupuri cristalografice ale grupului ∞/mmm sînt toate grupurile de simetrie ale cristalelor, în afară de cele cubice, adică grupurile 1, $\bar{1}$, m, 2, $2/m$, $mm2$, 222, mmm, 3, $\bar{3}$, $3m$, 32, $\bar{3}m$, 6, $\bar{6}$, $6/m$, $\bar{6}m2$, $6mm$, 622, $6/mmm$, 4, $\bar{4}$, $4/m$, $4mm$, $\bar{4}2m$, 422, $4/mmm$. Cu alte cuvinte, simetria direcțiilor în cristale este descrisă de 27 grupuri.

Observăm că grupurile care aparțin sistemelor mijlocii* (de forma 622, $\bar{3}$, $\bar{4}2m$) descriu simetria axelor de ordinul cel mai mare (6, 3, $\bar{4}$ ș.a.m.d.). Grupurile rombice mmm și 222 descriu simetria direcțiilor ce coincid cu axele 2 cu condiția ca acestea

---

* Cînd se determină simetria punctuală, este natural să se considere un segment de pe direcția dată. În continuare, în acasată carte, cînd vor fi studiate simetriile planelor va fi luată în mod analog o parte a planului — o bucată a sa de dimensiuni finite.

* Așa se mai numesc sistemele tetragonale, romboedric și hexagonal.

Scanned with OKEN Scanner

să aibă axe 2 transversale (în afară de aceasta, pentru grupul *mmm* — să aibă şi plane de simetrie longitudinale şi transversale). Toate aceste axe sînt identice din punct de vedere al simetriei, deşi din punct de vedere fizic diferă (de exemplu, parametrii reţelei sînt diferiţi după diferitele axe).

Fiecare dintre grupurile *mm*2, 2/*m*, 2 şi *m* poate descrie simetria a două direcţii diferite din punct de vedere fizic. Într-adevăr, în clasa *mm*2, de exemplu, aşa cum se vede din fig. 18, simetria segmentelor de dreaptă aflate în planele de simetrie

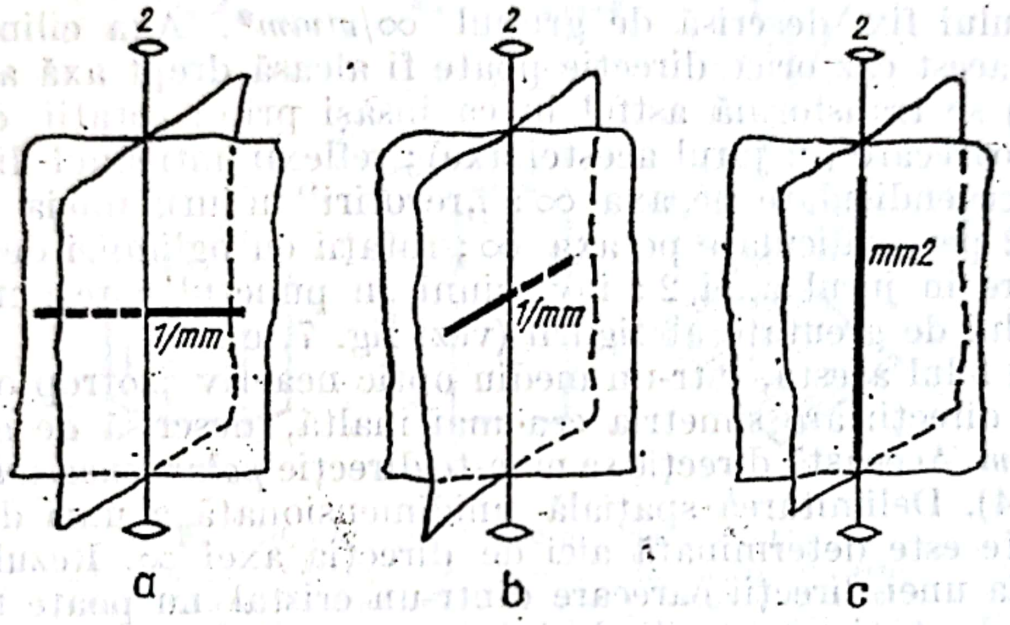


Fig. 18. În clasa cristalină *mm*2, direcţiile situate în planele de simetrie şi perpendiculare pe axa 2 (simetria lor se notează 1/*mm*; a şi b) diferă din punct de vedere fizic de direcţia care coincide cu axa 2 (simetria acestei direcţii se notează *mm*2). c) Simetria acestor trei *direcţii* este descrisă de unul şi acelaşi grup de simetrie *cirstalografică* *mm*2.

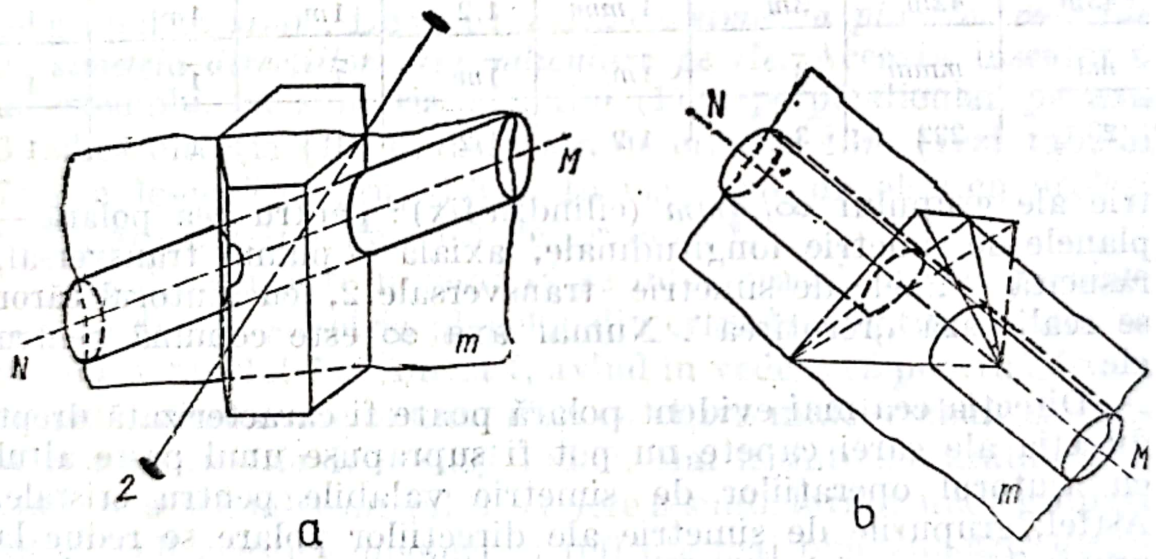
şi perpendiculare pe axa 2 este aceeaşi cu simetria segmentului care coincide cu axa 2, deşi din punct de vedere fizic aceste segmente sînt diferite. Într-adevăr, primele două dintre ele, de exemplu, sînt nepolare (vezi mai departe), iar al treilea este polar. O situaţie analogă se întîlneşte şi la grupurile 2/*m*, 2 şi *m*. Pentru a putea deosebi direcţiile despre care este vorba într-un caz dat, dacă ele sînt descrise de grupurile *mm*2, 2/*m* şi 2, se vor utiliza următoarele notaţii. În grupul *mm*2 simbolul *mm*2 rămîne pentru descrierea direcţiei ce coincide cu axa 2. Pentru direcţiile situate în plane perpendiculare pe axa 2 se folosesc notaţiile 1/*mm* ale aceluiaşi grup. În grupul 2/*m* direcţia care cincide cu axa 2 se va nota 2/*m*, iar cele situate în planul *m* — cu $\bar{1}m$. În grupul 2 direcţia care coincide cu axa 2 va fi

Scanned with OKEN Scanner

notată 2, iar oricare altă direcţie perpendiculară pe ea — cu 1/2. În grupul m direcţia situată în planul de simetrie se va nota $1m$, iar cea perpendiculară pe acest plan — cu $1/m$.

Prin urmare, cristalelor le vor corespunde în total 31 de direcţii fizic diferite. Simetria acestora este descrisă de toate cele 27 grupuri cristalografice ale sistemelor mijlocii şi joase*.

Folosind faptul că fiecare direcţie dintr-un cristal are simetria descrisă de un subgrup al grupului cilindrului ∞/mmm, se poate indica un mod simplu cu ajutorul căruia se determină uşor simetria oricărei direcţii date. Pentru aceasta trebuie să considerăm superpoziţia (compunerea) elementelor de simetrie ale cristalului şi cilindrului orientat după direcţia a cărei simetrie o căutăm. În conformitate cu principiul Curie al superpoziţiei simetriei, simetria unei direcţii este definită ca subgrupul comun cel mai înalt al ambelor grupuri iniţiale, care răspunde orientării date a cristalului şi cilindrului. În fig. 19 sînt date exemple de superpoziţie.



Fin. 19. Exemple de compunere a elementelor de simetrie ale unor cristale cu cilindrul:

a — compunerea elementelor de simetrie ale unui cristal ce are simetria $6/mmm$ (prismă hexagonală) cu cilindrul. Direcţia NM are simetria $\bar{1}m$; b — compunerea elementelor de simetrie ale unui cristal ce are simetria $\bar{4}2m$ (tetraedrul tetragonal) cu cilindrul. Direcţia NM are simetria $1m$.

Din ansamblul tuturor direcţiilor dintr-un cristal dat numai unele sînt descrise de grupuri de simetrie diferite. În tabelul 7 se indică simetria diferitelor direcţii din cristalele cubice. În Anexa I se dau tabele analoge pentru cristalele sistemelor mijlocii şi joase.

* Sisteme joase sînt sistemele triclinic, monoclinic şi rombic.

Scanned with OKEN Scanner

Din *clasa generală a direcţiilor* trebuie să separăm *subclasele de direcţii polare, axiale* şi *răsucite* (torsionate). Primele se supun simetriei conului (vezi fig.7, b), următoarele — simetriei cilindrului de rotaţie (fig. 7, d), iar ultimele — simtriei cilindrului torsionat (fig. 7, c). Pentru descrierea simetriei fiecăreia dintre aceste direcţii se foloseşte o parte a elementelor de sime-

Tabelul 7

Simetria direcţiilor în cristalele cubice

Clasa cristalografică	Indicii direcţiilor						
	[100]	[111]	[110]	[*hk*0]	[*hkk*]	[*hhl*]	[*hkl*]
*m*3*m*	4/*mmm*	$\bar{3}m$	*mmm*	$\bar{1}m$	$\bar{1}m$	$\bar{1}m$	$\bar{1}$
432	422	32	222	1/2	1/2	1/2	1
$\bar{4}3m$	$\bar{4}2m$	3*m*	1/*mm*	1/2	1*m*	1*m*	1
*m*3	*mmm*	$\bar{3}$	$\bar{1}m$	$\bar{1}m$	$\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{1}$
23	222	3	1/2	1/2	1	1	1

trie ale grupului ∞/*mmm* (cilindru fix) : pentru cea polară — planele de simetrie longitudinale, axială — planul transversal, răsucită — axele de simetrie transversale 2, cu ajutorul căror se realizează „rerotirea". Numai axa ∞ este comună pentru ele.

Direcţia cea mai evident polară poate fi caracterizată drept direcţia ale cărei capete nu pot fi suprapuse unul peste altul cu ajutorul operaţiilor de simetrie valabile pentru cristale. Astfel, grupurile de simetrie ale direcţiilor polare se reduc la grupurile ∞*mm* şi ∞*. Pentru cristale asemenea grupuri vor fi (vezi tabelul 3) : 1, 2, 3, 4, 6, 1*m*, *mm*2, 3*mm*, 4*mm*, 6*mm*. Din tabelul 7 şi Anexa I se vede că direcţii polare există în toate cristalele, cu excepţia celor centrosimetrice.

În cristalografia fizică se foloseşte termenul de *direcţii polare privilegiate*. Asemenea direcţii sînt direcţiile polare care într-un cristal dat nu-şi au egal. Totuşi, într-un cristal sînt doar cîteva direcţii privilegiate. Astfel, în clasa 1 toate direcţiile sînt polare privilegiate, în clasa *m* — toate direcţiile care se

* Grupurile care se reduc la grupul ∞ sînt, de asemenea, subordonate grupului ∞*mm*, deoarece grupul ∞ este subordonat grupului ∞*mm* (vezi fig. 9).

Scanned with OKEN Scanner

află în planul de simetrie, în clasa $4mm$ — direcția axei 4 ș.a. m.d. Așadar, noțiunea de „direcție polară privilegiată" se deosebește de noțiunile introduse mai înainte „direcție privilegiată", „plan privilegiat", „volum privilegiat", Din cele spuse rezultă că dacă într-un cristal o direcție este *simplu* polară, ea are direcții care-i sînt egale (cel puțin una).

Grupurile de simetrie ale direcțiilor axiale sînt subordonate grupului ∞/m. Ele sînt : 1, 2, 3, 4, 6, $1/m$, $2/m$, $\bar{6}$, $4/m$, $6/m$, $\bar{1}$, $\bar{4}$, $\bar{3}$ (rîndurile I—VI din tabelul 3).

Grupurile de simetrie ale direcțiilor răsucite sînt subordonate grupului $\infty 2$: 1, 2, 3, 4, 6, 1/2, 222, 32, 422, 622.

Direcții de răsucire există la cristalele tuturor claselor, în afara celor centrosimetrice (vezi tabelul 7 și Anexa I).

Dacă prin plan se înțelege o figură plană bidimensională decupată în spațiu, simetria ei trebuie să fie descrisă de simetria unui disc. În cazul cel mai simetric, simetria discului coincide cu simetria cilindrului fix (vezi fig. 7, e) și este descrisă de grupul ∞/mmm. De aici rezultă că *simetria planelor coincide cu simetria direcțiilor perpendiculare pe ele.* Aceasta înseamnă, de exemplu, că simetria planului (111) perpendicular pe axa 3 (adică direcția [111]), din clasa de cristale $\bar{4}3m$ (vezi tabelul 7) este descrisă de grupul $3m$. În clasa $m3$, un plan cu aceiași indici are simetria descrisă de grupul $\bar{3}$*.

Așadar, nu este necesar să se întocmească tabele speciale care să descrie simetria planelor din cristale. Pentru aceasta se pot folosi tabelul 7 și Anexa I, avînd în vedere că pentru găsirea grupului de simetrie al unui *plan* cu cîțiva indici trebuie să considerăm o *direcție* de aceiași indici. Mai înainte s-a arătat rațiunea de a schimba modul de scriere a simbolurilor unor grupuri astfel încît aceste simboluri să reflecte mai bine simetria *direcțiilor* (grupurile $mm2$, $2/m$, 2, m). Vorbind despre simetria planelor s-ar putea introduce, de asemenea, unele schimbări în simbolistică, dar noi nu vom face aceasta aici. Cunoscînd particularitățile orientărilor elementelor de simetrie după sim-

---

* Trebuie să atragem atenția încă o dată că în această carte *grupurile* de simetrie se notează conform „Tabelelor cristalografice internaționale", în care liniuța deasupra simbolului înseamnă *axă de inversiune*. În afară de aceasta, axele de *oglindire*, ca *elemente* de simetrie, sînt notate tot cu liniuță peste simbol. Astfel, în cazul concret de mai sus exprimarea „planul cu aceiași indici are simetria descrisă de grupul $\bar{3}$ "înseamnă că se are în vedere (în clasa $m3$) planul perpendicular pe axa $\bar{6}$ a cristalului.

Scanned with OKEN Scanner

bolurile simetriei direcţiilor, nu este greu să ne imaginăm în ce raport se află aceste elemente cu planul considerat. Să considerăm, de exemplu, că un plan oarecare are grupul de simetrie $1/m$ (determinat după tabele de forma tabelului 7). Aceasta înseamnă că planul considerat este plan de simetrie. Dacă, din tabele, s-a găsit că simetria planului este $1m$, înseamnă că în respectivul plan nu se află nici un fel de elemente de simetrie, dar că pe el este perpendicular planul de simetrie m ş.a.m.d.

Din ansamblul complet al *planelor*, în mod analog cu cazul direcţiilor, se pot distinge *plane polare*, *axiale* şi *de răsucire*. Bineînţeles, aici este vorba (ca şi în cazul direcţiilor) nu despre plane în sens geometric şi se poate, de asemenea, vorbi despre particularităţile *laturilor* planelor, despre orientarea acestor laturi. Planele polare sînt perpendiculare pe direcţiile polare; la asemenea plane pot fi distinse „sus" şi „jos" şi se poate indica sensul de la unul spre altul. Cazul cel mai simplu de plan polar este stratul electric dublu (dipolar), la care o faţă este încărcată pozitiv, iar cealaltă negativ (fig. 20, a). Planele polare sînt descrise de aceleaşi grupuri de simetrie ca şi direcţiile polare.

Planele axiale au o orientare determinată a mişcării circulare pe suprafeţele lor. Pe o parte a planului mişcarea circulară

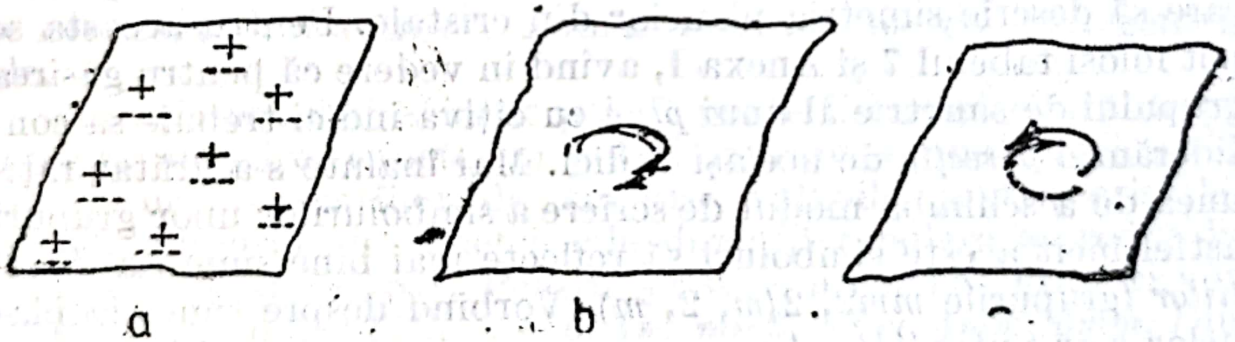


Fig. 20. Orientarea planelor:

a — plan polar (după exemplul stratului electric dipolar); b — plan axial (dacă se priveşte din partea opusă a planului, sensurile mişcării (de înconjurare) vor fi opuse); c — plan răsucit (dacă se priveşte din partea opusă a planului, sensurile de înconjurare vor fi aceleaşi).

se va efectua în sensul acelor de ceasornic, iar pe cea opusă — în sens invers (fig. 20, b). În cazul planelor de răsucire mişcarea circulară are unul şi acelaşi sens pe feţele opuse (fig. 20, c). Simetria planelor axiale şi de răsucire este aceeaşi ca simetria direcţiilor axiale şi de rotaţie.

Scanned with OKEN Scanner

1.4. SIMETRIA SCALARILOR, VECTORILOR ŞI TENSORLIOR

a) SCALARI, VECTORI ŞI TENSORI

Mărimile fizice care nu depind de direcţie se numesc *scalari* (mărimi scalare). Exemple de astfel de mărimi pot fi : densitatea unui corp, valorile presiunii în fiecare punct al unui volum în cazul compresiunii hidrostatice, mărimea ce caracterizează activitatea optică a unui mediu lichid ş.a. Din punct de vedere analitic mărimile scalare sînt date printr-*un singur număr*. Trebuie să deosebim două tipuri de mărimi scalare : *scalari* propriu-ziși (sau, simplu, scalari) şi *pseudoscalari*. Deosebirea dintre scalari şi pseudoscalari constă în faptul că scalarii sînt „insensibili" faţă de schimbarea semnului sistemului de coordonate*, în timp ce pseudoscalarii îşi schimbă semnul odată cu cel al sistemului de referinţă. Această caracteristică a pseudoscalarilor de a-şi schimba semnul la inversarea semnului sistemului de coordonate indică faptul că fiecare pseudoscalar este sau drept (în acest caz i se poate atribui semnul plus), sau stîng (semnul minus). Schimbarea semnului unui pseudoscalar este deci rezultatul direct al schimbării semnului sistemului. Pseudoscalarul în sine nu se schimbă cu această ocazie.

„Insensibilitatea" scalarilor faţă de schimbarea semnului sistemului de coordonate nu interzice posibilitatea ca ei să fie atît pozitivi, cît şi negativi. Astfel, de exemplu, destinderea hidrostatică a unui mediu este caracterizată prin semnul plus, iar comprimarea — prin semnul minus. La rîndul său, activitatea optică a unor medii este caracterizată de pseudoscalari şi poate fi pozitivă, (de exemplu, rotirea planului de polarizare în sensul şurubului drept) sau negativă (rotire în sensul şurubului stîng). Vom nota scalarii cu a, b,..., iar pseudoscalarii prin A, B,....

Cea mai simplă dintre mărimile orientate este *vectorul*. Orientarea mărimilor vectoriale constă în aceea că la ele se pot deosebi capetele opuse. Există două feluri de mărimi vectoriale : *vectori polari* (sau, simplu, vectori) şi *vectori axiali*. La vec-

---

* Prin „semn" al unui sistem de coordonate, aici şi în cele ce urmează, se înţelege apartenenţa sistemului la una dintre cele două orientări — dreaptă sau stîngă (respectiv, sistem dextrogir sau sistem levogir). Semnul uneia dintre orientări poate fi considerat pozitiv, iar al celeilalte — negativ.

Scanned with OKEN Scanner

torii polari deosebirea dintre cele două capete opuse are caracter scalar :. capetele vectorului pot fi caracterizate de scalari de semne opuse, dar egali în mărime absolută. Analog, vectorii axiali pot fi caracterizaţi prin pseudoscalari de semne opuse: unul dintre ei este drept (să spunem, pozitiv), iar celălalt stîng (să spunem, negativ). Fizicienii au de-a face frecvent cu mărimi vectoriale. Astfel, de exemplu, forţa şi intensitatea cîmpului electric sînt descrise de vectori polari, iar mărimi ca momentul impulsului şi intensitatea cîmpului magnetic — de vectori axiali.

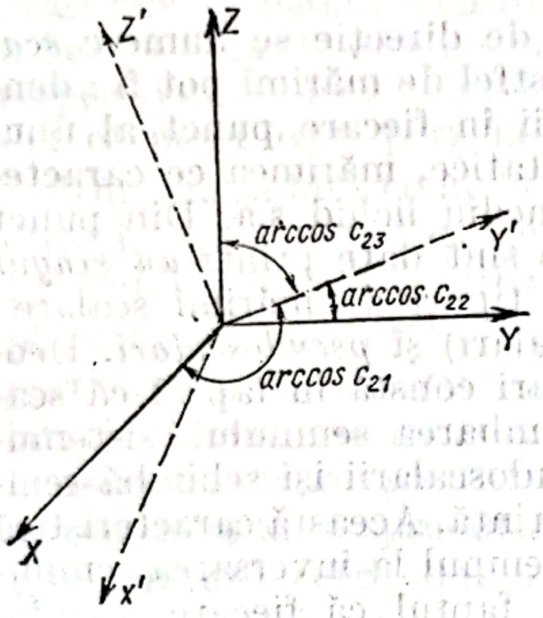


Fig. 21. Trecerea de la un sistem iniţial de coordonate X, Y, Z la altul nou X', Y', Z'.

Dacă componentele unui vector polar a într-un sistem de coordonate iniţial X, Y, Z sînt $a_i (i = 1,2,3)$*, cînd se trece la un alt sistem de coordonate X', Y' Z' (fig. 21) determinat de matricea cosinuşilor directori $c_{ij} (j = 1, 2, 3)$

$$\begin{array}{c|ccc} & X & Y & Z \\ X' & c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ Y' & c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ Z' & c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{array} \qquad (1.1)$$

noile componente vor fi

$$a'_i = c_{ij} a_j. \qquad (1.2)$$

Trecerea de la noile componente la cele vechi se realizează cu ajutorul formulei

$$a_j = c_{ji} a'_j. \qquad (1.3)$$

Componentele unui vector axial **A** se transformă prin rotaţii simple (operaţii de simetrie de ordinul întîi), de asemenea, ca şi componentele vectorului polar. În cazul operaţiilor de simetrie de ordinul doi (rotaţii cu oglindiri), formulele de transformare sînt

$$A'_i = - c_{ij} A_j; \quad A_i = - c_{ji} A'_j \qquad (1.4)$$

* Axa X corespunde indicelui 1, axa Y—lui 2, iar Z—lui 3.

Semnul minus apare datorită faptului că la vectorul axial capetele sînt „sensibile" faţă de schimbarea semnului sistemului de coordonate.

Următoarele (după vectori, ca complexitate) mărimi orientate sînt *tensorii de ordinul doi*. *Tensorii polari de ordinul doi* definesc legătura liniară dintre componentele a doi vectori polari sau doi vectori axiali, iar *tensorii axiali* — legătura dintre doi vectori, unul polar şi celălalt axial. Tensorul polar a_{ij}, care leagă componentele vectorilor polari **P** şi **Q**, este determinat de nouă componente

$$\begin{array}{cccc} & Q_1 & Q_2 & Q_3 \\ P_1 & a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ P_2 & a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ P_3 & a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{array} \qquad (2.5)$$

Exemple de tensori polari de ordinul doi sînt tensorii ce caracterizează permitivitatea dielectrică ε_{ij} (tensori ce leagă inducţia electrică **D** şi intensitatea cîmpului electric, **E**), conductivitatea electrică σ_{ij} (leagă vectorii densitate de curent **j** şi intensitate a cîmpului elecric **E**) ş.a.m.d.

Tensor axial de ordinul doi este, de exemplu, polarizarea **P** a unui cristal în funcţie de cîmpul magnetic **H**

$$\begin{array}{cccc} & H_1 & H_2 & H_3 \\ P_1 & A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ P_2 & A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ P_3 & A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{array} \qquad (1.6)$$

precum şi magnetizarea cristalului ca rezultat al polarizării sale (*efectul magnetoelectric*) Componentele tensorului axial se vor nota cu A_{ij}. Formulele de transformare ale componentelor tensorilor de ordinul doi (precum şi ale scalarilor şi vectorilor) sînt date în tabelul 8. Trebuie să atragem atenţia că în formulele de transformare ale tensorului axial pentru operaţiile de ordinul doi (rotaţii cu oglindiri) se ia semnul minus. Aceasta se datoreşte tot faptului că mărimile axiale sînt „sensibile" faţă de schimbarea semnului sistemului de coordonate, adică sînt fie drepte, fie stîngi.

Scanned with OKEN Scanner

Tabelul 8

Formulele de transformare a componentelor scalarilor, vectorilor şi tensorilor de ordinul doi

Mărimea	Ordinul tensorului	Numărul componentelor independente	Formulele de transformare	
			la transformarea sistemului de coordonate fără schimbare de semn	cu schimbare de semn
Scalar	0	1	$a' = a$ $a = a'$	$a' = a$ $a = a'$
Pseudoscalar	0	1	$A' = A$ $A = A'$	$A' = -A$ $A = -A'$
Vector polar	1	3	$a'_i = c_{ij}a_j$ $a_i = c_{ji}a'_j$	$a'_i = c_{ij}a_j$ $a_i = c_{ji}a'_j$
Vector axial	1	3	$A'_i = c_{ij}A_j$ $A_i = c_{ji}A'_j$	$A'_i = -c_{ij}A_j$ $A_i = -c_{ji}A'_j$
Tensor polar de ordinul doi	2	9	$a'_{ij} = c_{ik}c_{jl}a_{kl}$ $a_{ij} = c_{ki}c_{lj}a'_{kl}$	$a'_{ij} = c_{ik}c_{jl}a_{kl}$ $a_{ij} = c_{ki}c_{lj}a'_{kl}$
Tensor axial de ordinul doi	2	9	$A'_{ij} = c_{ik}c_{jl}A_{kl}$ $A_{ij} = c_{ki}c_{lj}A'_{jl}$	$A'_{ij} = -c_{ik}c_{jl}A_{kl}$ $A_{ij} = -c_{ki}c_{lj}A'_{kl}$

Scanned with OKEN Scanner

Pot fi consideraţi şi tensori de ordin mai mare. Astfel, tensorii de ordinul trei descriu legătura dintre vectori şi tensori de ordinul doi. Asemenea tensori au $3 \cdot 3 \cdot 3 = 27$ componente. Tensorii de ordinul trei descriu, de exemplu, efectul piezoelectric în cristale. Tensorii de ordinul patru descriu legătura dintre doi tensori de ordinul doi şi au $(3 \cdot 3) \cdot (3 \cdot 3) = 81$ componente ş.a.m.d. (vezi cap. 3). În cazul general numărul componentelor unui tensor de ordinul n este egal cu 3^n. Punînd $n = 0$ şi $n = 1$ obţinem numărul componetelor 1 şi 3. De aici rezultă posibilitatea de a trata scalarii drept tensori de ordinul zero, iar vectorii drept tensori de ordinul întîi.

Un tensor polar de ordinul doi, de formă generală, avînd nouă componente diferite, poate fi reprezentat (în concordanţă cu regulile algebrei tensorilor) sub forma sumei de doi tensori*

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a'_{11} & a'_{12} & a'_{13} \\ a'_{12} & a'_{22} & a'_{23} \\ a'_{13} & a'_{23} & a'_{32} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -a''_{12} & a''_{13} \\ a''_{12} & 0 & -a''_{23} \\ -a''_{13} & a''_{23} & 0 \end{bmatrix}, \qquad (1.7)$$

primul dintre ei $[a'_{ij}]$ fiind *simetric*, iar cel de-al doilea $[a''_{ij}]$ — *antisimetric*. Formulele care permit aflarea componentelor fiecăruia dintre aceşti tensori sînt

$$a'_{ji} = \frac{a_{ij} + a_{ji}}{2}; \quad a''_{ij} = \frac{a_{ij} - a_{ji}}{2}. \qquad (1.8)$$

Se numeşte *simetric* tensorul ale cărui componente satisfac condiţia

$$a_{ij} = a_{ji}$$

iar *antisimetric* — condiţia

$$a_{ij} = -a_{ji}.$$

Se ştie, de asemenea din algebra tensorială, că pentru orice tensor simetric poate fi găsit un sistem de coordonate în care el să aibă numai componente *diagonale*. Un asemenea tensor se numeşte redus la formă diagonală, iar sistemul de coordonate în care el are forma redusă se numeşte sistem *principal* de axe.

---

* Spre a-l deosebi de matricea cosinuşilor, tensorii se vor scrie în paranteze drepte.

Scanned with OKEN Scanner

Vom considera că componentele unui tensor polar sînt *diferite* dacă ele au fie valori absolute diferite, fie semne diferite (chiar cînd valorile absolute coincid), fie şi semne, şi valori absolute diferite. Cu o asemenea reprezentare asupra deosebirii dintre componentele unui tensor, toţi tensorii simetrici pot fi reduşi — aşa cum se poate vedea uşor — la numai patru tipuri

$$\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{11} & 0 \\ 0 & 0 & a_{11} \end{bmatrix}; \quad (1.9) \qquad \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{11} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{bmatrix}; \quad (1.10)$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{bmatrix}; \quad (1.11) \qquad \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & -a_{11} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (1.12)$$

primul dintre ele avînd toate componentele diagonale aceleaşi, al doilea — două componente diagonale identice, al treilea — toate diferite, iar al patrulea — două componente egale în valoare absolută, dar de semne diferite.

Se poate arăta că prin alegerea corespunzătoare a sistemului de coordonate un tensor oarecare antisimetric de forma

$$\begin{bmatrix} 0 & -a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & 0 & -a_{23} \\ -a_{13} & a_{23} & 0 \end{bmatrix} \quad (1.13)$$

poate fi adus la forma cea mai simplă printr-o transformare a sistemului de coordonate

$$\begin{bmatrix} 0 & -a_{12} & 0 \\ a_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (1.14)$$

Sistemul de coordonate în care un tensor antisimetric se scrie sub cea mai simplă formă se mai numeşte şi *sistem principal* de axe, iar axa cu componente nule — *axă principală*. Pentru tensorii de forma (1.14) axa principală coincide cu axa Z a sistemului de coordonate.

Tensorul (1.9) este determinat de un singur număr şi reprezintă forma tensorială a scalarului. După cum se ştie, tensorii polari antisimetrici (1.13) şi (1.14) descriu un vector axial.

Algebra tensorială nu impune limitări asupra posibilităţii reprezentărilor unui tensor axial sub forma sumei a doi tensori—

Scanned with OKEN Scanner

simetric şi antisimetric. Formulele corespunzătoare acestei operaţii sînt analoge cu (1.8). Reducerea părţilor simetrice ale acestor tensori la sistemul de coordonate principal, iar a celor antisimetrice — la forma cea mai simplă (cu indicarea axei principale) este în acest caz analogă cazurilor abia studiate mai înainte, referitor la tensorul polar.

Cel mai mare interes îl prezintă următoarele forme particulare ale tensorului axial de ordinul doi:

$$\begin{bmatrix} A_{11} & 0 & 0 \\ 0 & A_{11} & 0 \\ 0 & 0 & A_{11} \end{bmatrix}; \quad (1.15) \qquad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_{33} \end{bmatrix}; \quad (1.16)$$

$$\begin{bmatrix} A_{11} & 0 & 0 \\ 0 & -A_{11} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad (1.17) \qquad \begin{bmatrix} 0 & -A_{11} & 0 \\ A_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (1.18)$$

Tensorul (1.15), după cum ne dăm seama cu uşurinţă, defineşte un *pseudoscalar*. Tensorul axial antisimetric de forma (1.18) detrmină un *vector polar**. Ultima afirmaţie se poate demonstra arătînd că formulele de transformare a componentelor acestui tensor coincid cu formulele de transformare ale vectorului polar (1.2). Demonstraţia faptului că vectorul polar este descris de tensorul axial (1.18) va fi făcută aici bazîndu-ne pe faptul că ambele mărimi au aceeaşi simetrie.

b) SIMETRIA SCALARILOR

La determinarea simetriei scalarilor, vectorilor şi tensorilor întîlnim, în primul rînd, mărimi al căror aspect geometric ne poate fi şi necunoscut. În cazul tensorilor** noţiunea de simetrie se concretizează prin următoarele: *simetria tensorilor este proprietatea acestora de a fi invarianţi în raport cu transformările sistemului de coordonate* (rotaţii şi rotaţii cu oglindire) în care sînt scrişi. Prin definiţie, tensorii au unele elemete de simetrie sau altele dacă la transformările sistemului de coordonate corespunzătoare acestor elemente de simetrie, *toate componentele lor se transformă în ele însele*. Practic, aceasta se realizează pe calea transformării sistemului de coordonate, corespunză-

---

* Este interesant de observat că *tensorul polar* antisimetric determină vectorul său axial, iar *tensorul axial* antisimetric — pe cel polar.

** Scalarii şi vectorii sînt, respectiv, tensori de ordinul zero şi unu.

Scanned with OKEN Scanner

toare elementului de simetrie căutat, urmată de calcularea componentelor tensorului (vectorului, scalarului) în noul sistem, folosind formulele de transformare adecvate (v. tabelul 8).

Să arătăm că pentru scalarul

$$\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{11} & 0 \\ 0 & 0 & a_{11} \end{bmatrix} \tag{1.9}$$

toate axele care trec prin originea coordonatelor sînt axe de simetrie de ordin infinit (deci, şi oarecare), iar planele ce trec prin origine sînt plane de simetrie ale tensorului. Vom arăta, de asemenea, că scalarul are centru de simetrie.

Cel mai simplu este să demonstrăm ultima afirmaţie. Matricea cosinuşilor, corespunzătoare operaţiei de inversiune a sistemului de coordonate faţă de origine, are forma*

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{1.19}$$

Folosind datele tabelului 8, obţinem: $a_{11} = a_{11}$; $a_{22} = a_{11}$; $a_{33} = a_{11}$. Astfel, prin această operaţie toate componentele scalarului se transformă în ele însele; în noul sistem de coordonate scalarul va avea aceeaşi formă ca şi în cel iniţial, ceea ce înseamnă tocmai faptul că scalarul are centru de simetrie.

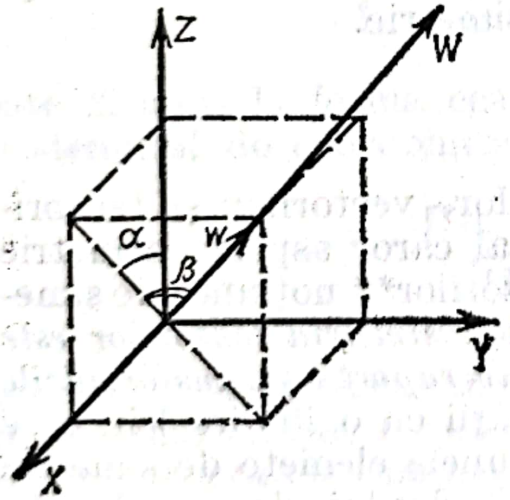


Fig. 22. Succesiune de rotaţii ale unui sistem de coordonate, care se reduce la o rotaţie în jurul unei direcţii oarecare W (w — vectorul unitate al direcţiei W).

Să dovedim acum existenţa axelor de simetrie de ordin ∞. Vom demonstra că o axă oarecare W este o asemenea axă. Pentru aceasta, cu ajutorul a două rotaţii facem să coincidă axa Z'' cu axa W: mai întîi o rotaţie de unghi α în jurul axei Y şi apoi altă rotaţie de unghi β în jurul axei X' (fig. 22). După aceea rotim sistemul de coordonate X'', Y'', Z'' în jurul axei Z'' cu un unghi oarecare. Dacă după o asemenea rotire a sistemului de coordonate componentele tensorului (1.9) se transfor-

* Amintim că matricele cosinuşilor, pentru a nu fi confundate cu tensorii, vor fi scrise în paranteze curbe.

Scanned with OKEN Scanner

mă în ele însele, aceasta înseamnă că axa $W(Z'')$ este chiar axa ∞ a scalarului. Rotației în jurul axei Y cu un unghi oarecare α îi corespunde matricea cosinușilor

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & 0 & -\sin\alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\alpha & 0 & \cos\alpha \end{pmatrix}. \tag{1.20}$$

Folosind datele din tabelul 8 obținem

$$a'_{11} = c_{11}c_{11}a_{11} + c_{12}c_{12}a_{22} + c_{13}c_{13}a_{33} = \cos^2\alpha \cdot a_{11} +$$

$$+ \sin^2\alpha \cdot a_{11} = a_{11}(\cos^2\alpha + \sin^2\alpha) = a_{11}.$$

Analog $a'_{22} = a_{11}$, $a'_{33} = a_{11}$. Toți ceilalți coeficienți a'_{ij} $(i \neq j)$, aici ca și la alte transformări ale sistemului de coordonate ale scalarului (care vor fi analizate mai departe), sînt egali cu zero : $a'_{12} = 0$, $a'_{13} = 0$, $a'_{21} = 0$, $a'_{23} = 0$, $a'_{23} = 0$, $a'_{31} = 0$,

Rotația noului sistem de coordonate X', Y', Z' $(Y' = Y)$ în jurul axei X' cu unghiul β este descrisă de matricea

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\beta & -\sin\beta \\ 0 & \sin\beta & \cos\beta \end{pmatrix}, \tag{1.21}$$

cu ajutorul căreia obținem, de asemenea, $a'_{11} = a_{11}$, $a'_{22} = a_{11}$, $a'_{33} = a_{11}$. În sfîrșit, rotația sistemului X'', Y'', Z'' $(Z'' = Z')$ în jurul axei Z' cu un unghi oarecare γ, adică rotația în jurul lui W se realizează cu ajutorul matricei

$$\begin{pmatrix} \cos\gamma & -\sin\gamma & 0 \\ \sin\gamma & \cos\gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{1.22}$$

care, după cum se verifică ușor, conduce de asemenea la rezultatul $a'_{11} = a'_{22} = a_{11}$, $a'_{33} = a_{11}$. Datorită faptului că direcția W a fost aleasă arbitrar, ajungem la concluzia că orice axă care trece prin originea coordonatelor este o axă de simetrie de ordin ∞ pentru scalar.

Să arătăm acum că planul perpendicular pe axa ∞ este un plan de simetrie. Matricea cosinușilor care descrie reflexia sis-

Scanned with OKEN Scanner

temului de coordonate X'', Y'', Z'' în acest plan, are forma

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{1.23}$$

Folosirea acestei matrice şi a tabelului 8 conduce la următorul rezultat: $a'_{11} = a_{11}$, $a'_{22} = a_{11}$, $a'_{33} = a_{11}$. Planul perpendicular pe axa W este, deci, un plan de simetrie. În virtutea faptului că W are o direcţie oarecare, orice plan care trece prin originea coordonatelor este un plan de simetrie al scalarului. Observăm că axa ∞ nu este numai una dintre axele simple (de rotaţie) ale scalarului, ci este în acelaşi timp şi axă de oglindire. Demonstraţia este evidentă. Scalarul nu are alte elemente de simetrie. Contractat, elementele de simetrie fundamentale ale scalarului pot fi scrise sub forma: ∞/∞, $(\infty)m$, c. Prin aceasta trebuie înţeles că: scalarul are un număr infinit de axe de simetrie ∞ (faptul că ele sînt orientate reciproc sub un unghi oarecare este indicat de scrierea celor două simboluri separate prin bară oblică), un număr infinit de plane de simetrie perpendiculare pe axele menţionate (datorită numărului infinit de axe ∞, planele sînt şi longitudinale) şi centru de simetrie. Grupul de simetrie al scalarului poate fi, deci, notat astfel: $\infty/\infty/mmm$. Acest simbol arată că fiecare dintre direcţiile scalarului are o axă de simetrie ∞, un număr infinit de plane de simetrie longitudinale şi un plan de simetrie perpendicular pe această direcţie, adică scalarul are simetria cilindrului fix. Grupul de simetrie al scalarului coincide, deci, cu grupul de simetrie al sferei obişnuite, care este exemplu de grup de simetrie Curie limită (vezi fig. 7, g).

Pentru pseudoscalarul

$$\begin{bmatrix} A_{11} & 0 & 0 \\ 0 & A_{11} & 0 \\ 0 & 0 & A_{11} \end{bmatrix} \tag{1.15}$$

după cum rezultă analitic, ca şi pentru scalari, oricare axă ce trece prin originea coordonatelor este axă de simetrie ∞. Nu este necesar să demonstrăm aceasta, întrucît formulele de transformare ale componentelor pseudoscalarului coincid, în cazul rotaţiilor simple, cu formulele de transformare ale componentelor scalarului (vezi tabelul 8), iar pentru găsirea axelor ∞ ale scalarului s-au folosit numai rotaţiile simple ale sistemului de coordonate.

Scanned with OKEN Scanner

Se poate arăta că pseudoscalarul nu are deloc, ca elemente de simetrie, plane de simetrie. Într-adevăr, reflectînd sistemul de coordonate X'', Y'', Z'' în acest caz într-un plan perpendicular pe axa W [care coincide cu Z'' ; o asemenea transformare este descrisă de matricea (1.23)], obţinem — folosind datele tabelului 8 — următoarele : $A'_{11} = -A_{11}$; $A'_{22} = -A_{11}$; $A'_{33} = -A_{11}$. Astfel, prin această operaţie toate componentele pseudoscalarului iau noi valori, ceea ce conduce la concluzia că planul considerat nu este un plan de simetrie. Întrucît direcţia W a fost aleasă arbitrar, niciunul dintre planele care trec prin origine nu va fi plan de simetrie al pseudoscalarului.

Pseudoscalarul are numai centru de simetrie. Într-adevăr, reflectînd sistemul de coordonate faţă de originea sa [matricea cosinuşilor (1.19)], obţinem : $A'_{11} = -A_{11}$; $A'_{22} = -A_{11}$; $A'_{33} = -A_{11}$, ceea ce confirmă cele afirmate mai sus.

Fiecare direcţie din pseudoscalar are o axă de simetrie ∞. Pe lîngă aceasta, pseudoscalarul are un număr infinit de axe de simetrie de ordinul 2, prependiculare pe direcţia respectivă. Este important să subliniem aici această situaţie. Prezenţa axelor 2 decurge din faptul că axa grupului de simetrie 2 este un subgrup ∞. Întrucît orice direcţie din pseudoscalar este axă ∞, concret direcţia aleasă are un număr infinit de axe 2 perpendiculare pe ea. Ansamblul elementelor de simetrie ale pseudoscalarului este reprezentat prin scrierea simbolică ∞/∞, $(\infty)2$*. Grupul de simetrie al pseudoscalarului poate fi, deci, scris $\infty/\infty 2$. Acest grup coincide cu grupul de simetrie al sferei. ale cărei diametre sînt toate răsucite fie după şurubul drept, fie după cel stîng (şi au grupul de simetrie al cilindrului torsionat (răsucit) ; vezi fig. 7, c). Astfel, grupul de simetrie al pseudoscalarului coincide cu grupul de simetrie al sferei fără plane de simetrie, care este una dintre figurile caracterizate prin grupuri de simetrie limită (vezi fig. 7, f).

e) SIMETRIA VECTORILOR **

Simetria vectorilor polari poate fi stabilită considerînd transformarea componentelor lor [vezi formulele (1.2) şi (1.3)]

---

* Scalarii au, de asemenea, axe 2 perpendiculare pe direcţia aleasă, dar existenţa lor decurge deja din elementele de simetrie fundamentale scrise mai înainte.

** Simetria vectorilor va fi determinată în cele ce urmează (pentru generalitate) prin simetria tensorilor corespunzători. Desigur, acelaşi rezultate se obţin dacă se consideră vectorii ca mărimi de sine stătătoare, folosindu-se formulele de transformare ale componentelor vectorilor (vezi tabelul 8).

Scanned with OKEN Scanner

la transformarea sistemului de coordonate. Aceasta se poate face destul de simplu şi, de aceea, la stabilirea simetriei vectorilor polari vom analiza aspectul lor geometric. Un vector polar se reprezintă grafic sub forma unui segment de dreaptă cu săgeată la un capăt (fig. 23, a). Simetria lui coincide cu sime-

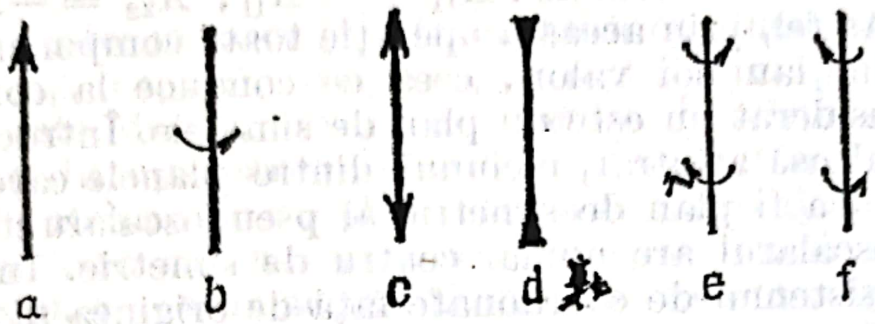


Fig. 23. Reprezentare grafică a simetriei unor vectori şi a celor mai simpli tensori

a — vector polar (simetria ∞mm); b — vector axial (simetrie ∞/m); c, d — cei mai simpli tensori polari (+) şi (—) (simetrie ∞/mmm); e, f — cei mai simpli tensori axiali drept şi stîng (simetrie $\infty 2$).

tria direcţiei polare (grupul ∞mm); vectorul polar are simetria conului fix (vezi fig. 7, b). Axa vectorului este axă de simetrie ∞. Vectorul polar are un număr infinit de plane de simetrie m, *care trec* prin axa ∞. Să arătăm că şi tensorul axial antisimetric are aceleaşi elemente de simetrie

$$\begin{bmatrix} 0 & -A_{12} & 0 \\ A_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{1.18}$$

Aici trebuie să facem o observaţie importantă. Natural, simetria unui tensor concret nu depinde de sistemul de coordonate în care este scris el. Datorită acestui fapt, simetria tensorului axial de mai sus va fi considerată în cazul în care el este scris sub forma cea mai simplă (1.18). Tensorii care au ceilalţi coeficienţi nediagonali diferiţi de zero definesc, de asemenea, vectori polari corespunzători, dar în acest caz nu este chiar simplu de găsit elementele lor de simetrie. Cu alte cuvinte, simetria unui tensor sau a altuia este o proprietate intrinsecă (internă) a tensorului, care nu depinde de alegerea sistemului de coordonate. Această caracteristică internă apare cel mai pregnant şi intuitiv în cazul cînd tensorul este scris sub formă *canonică* (vezi mai departe).

Să se întoarcem la simetria tensorului (1.18). Vom arăta că axa Z a acestui tensor este axă de simetrie ∞. Matricea cosinuşilor de transformare a sistemului de coordonate, răspunză-

Scanned with OKEN Scanner

toare de rotaţia acestuia în jurul axei Z cu un unghi oarecare γ, este matricea (1.22). Utilizarea ei dă : $A'_{12} = -A_{12}$, $A'_{21} = A_{12}$; toţi ceilalţi A_{ij} sînt egali cu zero. Datorită faptului că unghiul γ este oarecare, se poate conchide că axa Z este axă de simetrie ∞ pentru tensorul (1.18).

Se verifică uşor că tensorul (1.18) nu are plane de simetrie perpendiculare pe axa Z şi are un număr infinit de plane de simetrie care trec prin această axă. Într-adevăr, folosirea matricei consinuşilor corespunzătoare reflexiei într-un plan perpendicular pe axa Z [matricea (1.23)] conduce la rezultatul : $A'_{11} = A'_{22} = A'_{33} = A'_{31} = A'_{23} = A'_{32} = A'_{13} = 0$; $A_{12} = A_{12}$; $A'_{21} = -A_{12}$. Dar pînă la transformare am avut : $A_{12} = -A_{12}$; $A_{21} = A_{12}$. Aceasta înseamnă că transformarea respectivă este permisă în simetrie numai cu condiţia $A_{12} = A_{21} = 0$. Pentru tensorul concret (1.18), ale cărui componente sînt diferite de zero, planul perpendicular pe axa Z nu este plan de simetrie.

Matricea cosinuşilor corespunzătoare reflexiei sistemului de coordonate într-un plan, care trece prin axa Z şi care face unghiul α cu axa X, are forma

$$\begin{pmatrix} \cos 2\alpha & \cos(90-2\alpha) & 0 \\ \cos(90-2\alpha) & \cos(90-2\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \qquad (1.24)$$

Folosind această matrice găsim, în concordanţă cu tabelul 8, valorile componentelor tensorului (1.18) în noul sistem de coordonate : $A'_{11} = A'_{22} = A'_{33} = A'_{13} = A'_{31} = A'_{32} = 0$; $A'_{12} = -A_{12}$, $A'_{21} = A_{12}$. Prin urmare, la o asemenea transformare toate componentele tensorului (1.18) se transformă în ele însele, ceea ce arată că acest tensor are un plan de simetrie care trece prin axa Z. Din faptul că unghiul α este arbitrar rezultă că tensorul (1.18) va avea o mulţime infinită de asemenea plane de simetrie care trec prin axa Z. Se poate arăta că tensorul (1.18) nu are nici un fel de alte elemente de simetrie. Ansamblul elementelor de simetrie ale tensorului axial antisimetric de ordinul doi este reprezentat prin ∞, $(\infty)m$, iar grupul de simetrie poate fi scris ∞mm. Acest grup coincide cu grupul de simetrie al vectorului polar reprezentat în fig. 23, a. Prin urmare, numai pe baza simetriei se poate deduce (ceea ce se poate obţine şi analitic) că un tensor axial antisimetric determină propriul său vector polar.

Scanned with OKEN Scanner

După cum s-a arătat deja, un vector axial (fig. 23, b) poate fi reprezentat analitic sub forma unui tensor axial antisimetric

$$\begin{bmatrix} 0 & -a_{12} & 0 \\ a_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad (1.14)$$

În felul acesta, stabilirea simetriei vectorului axial se reduce la stabilirea simetriei tensorului (1.14).

Se arată uşor că axa Z a acestui tensor este axă de simetrie ∞. Aceasta decurge simplu din rezultatele obţinute la studierea simetriei vectorului polar [tensorului (1.18)], deoarece pentru stabilirea simetriei ultimului s-au folosit formule de transformare a componentelor care coincid cu acelea ce trebuie utilizate la analiza tensorului (1.14). Reflexia sistemului de coordonate într-un plan perpendicular pe axa Z [matricea cosinuşilor (1.23)], corelată cu formulele din tabelul 8, dă următoarele relaţii : $a'_{12} = -a_{12}$; $a'_{21} = a_{12}$; toate celelalte componente a_{ij} sînt egale cu zero, ceea ce conduce la concluzia că plnaul XY al sistemului de cordonate este un plan de simetrie al tensorului (1.14). Mai departe, se poate arăta că planele care trec prin axa Z nu sînt plane de simetrie ale tensorului (1.14). În fine, tensorul (1.14) are centru de simetrie. Matricea cosinuşilor scrisă pentru acest caz, corelată cu formulele din tabelul 8, arată că la inversarea sistemului de coordonate componentele tensorului (1.14) se transformă în ele însele. Tensorul (1.14) nu mai are şi alte elemente de simetrie. Ansamblul elementelor de simetrie ale tensorului polar antisimetric va fi ∞, m, c. Grupul de simetrie corespunzător se scrie sub forma ∞/m. Astfel, simetria vectorului axial coincide cu simetria cilindrului în rotaţie (vezi fig. 7, d).

d) SIMETRIA TENSORILOR DE ORDINUL DOI

Pentru rezolvarea completă a problemei simetriei tensorului de ordinul doi trebuie să ne ocupăm şi de simetria tensorilor *cei mai simpli*. Aşa se numesc tensorii care au numai o singură componentă diferită de zero, situată, pe diagonală. Cel mai simplu tensor polar are forma

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{bmatrix}, \qquad (1.25)$$

Scanned with OKEN Scanner

Studiul analitic arată că acest tensor are : o axă de simetrie ∞, care coincide cu axa Z a sistemului de coordonate; un plan de simetrie perpendicular pe axa ∞ (planul XY); un număr infinit de plane de simetrie, care trec prin axa Z; un număr infinit de axe de simetrie 2, perpendiculare pe axa Z; centru de simetrie. Ansamblul elementelor de simetrie poate fi scris sub forma ∞, m, $(\infty)m$, $(\infty)2$, c. El coincide cu ansamblul elementelor de sismetrie ale cilindrului (sau elipsoidului de rotaţie), iar grupul de simetrie al tensorului (1.25) poate fi scris sub forma ∞/mmm (vezi fig. 7, e).

Datorită simplităţii analizei, precum şi exemplelor deja date, nu vom demonstra existenţa axei ∞ şi a planelor de simetrie m; vom arăta doar că tensorul (1.25) are un număr infinit de axe de simetrie 2, perpendiculare pe axa Z. Rotirea sistemului de coordonate cu 180° în jurul axei situate în planul XY şi care face unghiul α, oarecare, cu axa Y, este descrisă de matricea cosinuşilor

$$\begin{pmatrix} \cos(180 - 2\alpha) & \cos(90 - 2\alpha) & 0 \\ \cos(90 - 2\alpha) & -\cos 2\alpha & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad (1.26)$$

Folosind (1.26), obţinem $a'_{33} = a_{33}$ şi toate celelalte $a'_{ij} = 0$, ceea ce conduce la concluzia că axa considerată este axă de simetrie de ordinul 2. Întrucît orientarea axei în planul XY se alege arbitrar, orice axă situată în planul XY va fi axă de simetrie 2 a tensorului (1.25).

Cel mai simplu tensor axial are forma

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_{33} \end{bmatrix}. \qquad (1.27)$$

Drept elemente de simetrie acest tensor va avea : o axă de simetrie ∞, care coincide cu axa Z şi un număr infinit de axe 2 perpendiculare pe axa ∞. Datorită simplităţii problemei nu vom da demonstraţia celor de mai sus. Grupul de simetrie al tensorului (1.27) se simbolizează $\infty 2$. Aceasta este chiar simetria cilindrului răsucit (torsionat), reprezentată de unul dintre grupurile limită (vezi fig. 7, c).

Mărimile scalare, vectoriale şi cele mai simple mărimi tensoriale pot fi considerate drept „cărămizile" elementare din care se poate construi orice tensor. Trebuie remarcat, în această

Scanned with OKEN Scanner

ordine de idei, că cei mai simpli tensori polari pot fi atît pozitivi, cît și negativi. Celor două cazuri le corespunde, de exemplu, întinderea și comprimarea unei bare. Cei mai simpli tensori axiali de semne diferite corespund, de exemplu, răsucirii unei bare după șurubul drept și stîng. Reprezentarea grafică a mărimilor tensoriale cele mai simple este dată în figurile 23, c—f. Reprezentările date reflectă corect simetria respectivelor mărimi.

Simetria tensorilor polari de ordinul doi de forma generală

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \tag{1.28}$$

și a altor combinații ale părților simetrică și antisimetrică ale unui tensor polar poate fi stabilită cu ajutorul principiului compunerii (superpoziției) simetriei (principiul lui Curie; vezi § 1.2). De exemplu, compunerea elementelor de simetrie a trei cilindri de înălțimi diferite, orientați reciproc perpendicular, cu condiția ca centrele lor să coincidă, conduce la grupul de simetrie *mmm*. Trei plane de simetrie, trei axe de ordinul doi și un centru de simetrie vor fi elementele de simetrie comune ale figurii compuse din cei trei cilindri în poziția dată. Acest caz corespunde tensorului simetric de formă generală (1.11), căruia și urmează să i se atribuie grupul de simtrie *mmm*. Să observăm mai departe, că orice tensor polar de ordinul doi are centru de simetrie. Aceasta decurge din faptul că un tensor simetric are centru de simetrie chiar și în cazul cel mai general (1.11). Existența centrului de simetrie în cazul vectorilor axiali (partea antisimetrică a tensorilor polari) a fost arătată mai înainte. Simetria tensorului (1.10), ca tensor care are același număr de componente diferite ca și tensorul (1.25), este descrisă tot de grupul ∞/mmm. Ne convingem ușor și că existența componentelor „antiegale" (egale și de semn opus) la tensorul (1.12) nu face să crească ordinul simetriei sale în comparație cu cazul cînd toate componentele sînt, pur și simplu, diferite ca mărime: tensorul (1.12) are grupul de simetrie *mmm*.

Astfel, ținînd seama de argumentele de mai sus și cunoscînd simetria scalarilor și a vectorilor axiali, se poate găsi ușor (folosind același principiu Curie) simetria tensorilor ca rezultat al superpoziției elementelor de simetrie ale elipsoidului cu elementele de simetrie ale vectorului axial. Într-adevăr, partea simetrică a tensorului polar reprezintă unul dintre elip-

Scanned with OKEN Scanner

soizii* : sferă (scalar), elipsoid de rotație sau elipsoid triaxial. Și invers, în cazul general *un tensor polar poate fi reprezentat de un elipsoid „întins" într-o direcție determinată de către un vector axial* (fig. 24, a). Forma acestui elipsoid și poziția „turtirii" determină însuși tensorul și simetria lui.

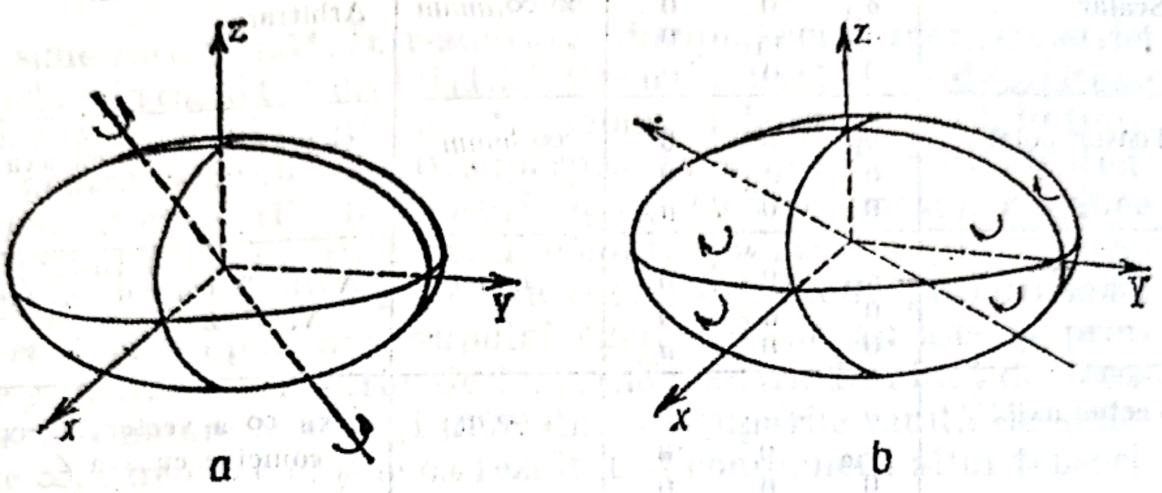


Fig. 24. Interpretarea geometrică a tensorilor de ordinul doi de formă generală : a — tensorul polar ca elipsoid combinat cu un vector axial; b — tensorul axial ca elipsoid combinat cu un vector polar.

În tabelul 9 sînt date rezultatele analizei simetriei tensorilor polari de ordinul doi. Există în el toate cazurile diferite ca simetrie și forma lor *canonică*. Aici prin formă canonică se înțelege forma care corespunde scrierii, în sistemul de coordonate principal, a părții simetrice a tensorului. După cum se știe, în acest sistem de coordonate partea simetrică se scrie numai după diagonala principală a tensorului. Pentru partea antisimetrică este considerată orientarea generală a vectorului axial și toate orientările particulare din diferite combinații (de simetrie). După cum se vede din tabelul 9, simetria tensorilor polari de ordinul doi este descrisă de șase grupuri : $\infty/\infty/mmm$, ∞/mmm, mmm, ∞/m, $2/m$, $\bar{1}$. Trei dintre ele sînt în același timp grupuri limită de simetrie.

Cunoscînd simetria pseudoscalarului (1.15), a vectorului polar [tensorului axial antisimetric (1.18)] și a celui mai simplu tensor axial (1.27), avem suficiente elemente pentru a determina simetria tuturor formelor canonice ale tensorului axial. Este interesant că numărul grupurilor de simetrie ale tensorului axial nu coincide cu numărul grupurilor tensorului polar. Această

* În cazul general se pot întîlni și alte suprafețe de ordinul doi — hiperpoloizi.

Forma canonică şi simetria completă a tensorilor polari de ordinul doi

Mărimea	Forma canonică a tensorului	Simetria tensorului	Poziţia axelor
Scalar	$\begin{matrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{11} & 0 \\ 0 & 0 & a_{11} \end{matrix}$	$\infty/\infty/mmm$	Arbitrară
Tensor polar	$\begin{matrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{11} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{matrix}$	∞/mmm	Axa ∞ coincide cu axa Z
	$\begin{matrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{matrix}$	mmm	Axele 2 coincid cu axele X, Y, Z
Vector axial	$\begin{matrix} 0 & -a_{12} & 0 \\ a_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix}$	∞/m	Axa ∞ a vectorului axial coincide cu axa Z
Combinaţia unui scalar cu un vector axial	$\begin{matrix} a_{11} & -a_{12} & 0 \\ a_{12} & a_{11} & 0 \\ 0 & 0 & a_{11} \end{matrix}$	∞/m	Axa ∞ a vectorului axial coincide cu axa Z
Combinaţia unui tensor polar cu un vector axial	$\begin{matrix} a_{11} & -a_{12} & 0 \\ a_{12} & a_{11} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{matrix}$	∞/m	Axele ∞ ale tensorului polar şi vectorului axial coincid cu axa Z
	$\begin{matrix} a_{11} & -a_{12} & 0 \\ a_{12} & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{22} \end{matrix}$	$2/m$	Axa ∞ a tensorului polar coincide cu axa X; axa ∞ a vectorului axial coincide cu axa Z
	$\begin{matrix} a_{11} & -a_{12} & 0 \\ a_{12} & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{matrix}$	$2/m$	Axele 2 ale tensorului polar coincid cu axele X, Y, Z; axa ∞ a vectorului axial coincide cu axa Z
	$\begin{matrix} a_{11} & -a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{11} & -a_{23} \\ -a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{matrix}$	$\bar{1}$	Axa ∞ a tensorului polar coincide cu axa Z; axa ∞ a vectorului axial nu coincide cu niciuna dintre axele X, Y, Z
	$\begin{matrix} a_{11} & -a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & -a_{23} \\ -a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{matrix}$	$\bar{1}$	Axele 2 ale tensorului polar coincid cu axele X, Y, Z; axa ∞ a vectorului axial nu coincide cu niciuna dintre axele X, Y, Z

Scanned with OKEN Scanner

diferență este condiționată de faptul că tensorii analogi, care nu diferă prin simetrie de tensorii (1.11) și (1.12),

$$\begin{bmatrix} A_{11} & 0 & 0 \\ 0 & A_{22} & 0 \\ 0 & 0 & A_{33} \end{bmatrix}; \quad (1.29) \qquad \begin{bmatrix} A_{11} & 0 & 0 \\ 0 & -A_{11} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (1.30)$$

au simetrie diferită*. Într-adevăr, principiul compunerii simetriei conduce în cazul tensorului (1.29) (trei cilindri răsuciți, de înălțime diferită sau grad diferit de „torsionare") la grupul 222, în timp ce pentru tensorul (1.30) superpoziția a doi cilindri identici, avînd „torsionări" de sensuri opuse (semne opuse), conduce la grupul $\bar{4}2m$. La rîndul său, combinația acestui grup cu vectori polari de orientări diferite conduce la două grupuri $mm2$ și m — subgrupuri ale grupului $\bar{4}2m$, care nu au analog printre grupurile de simetrie ale tensorilor polari. În afară de aceasta, aici nu are analog și unul dintre grupurile limită de simetrie ∞, care ce se obține ca rezultat al compunerii altor tensori ce au axe ∞, cu vectorul polar (grupul ∞mm).

Găsirea simetriei tensorilor axiali de forma generală

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix} \quad (1.22)$$

nu prezintă dificultăți și se reduce la considerarea superpoziției unuia dintre elipsoizii fără plane de simetrie (sferă, elipsoid de rotație, elipsoid de tip general ș.a.m.d)** cu un vector polar. *Un tensor axial poate fi reprezentat, în cazul general, sub forma unui elipsoid fără plane de simetrie, „întins" de un vector polar* (fig. 24, b). Forma acestui elipsoid și poziția „turtirii" determină însăși simetria tensorului.

---

* În cadrul simetriei complete (v. cap. 2) tensorii

$$\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{bmatrix}; \quad (1.31) \qquad \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & -a_{11} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (1.32)$$

au simetrie diferită. Numărul total de grupuri de simetrie completă ale unui tensor polar (ca și ale celui axial) este egal, de asemenea, cu 10.

** Riguros, în cazul general pot fi și hierboloizi.

Scanned with OKEN Scanner

Tabelul 19

Forma canonică și simetria completă a tensorilor axiali de ordinul doi

Mărimea	Forma canonică	Simetria tensorului	Poziția axelor
Pseudoscalar	$\begin{matrix} A_{11} & 0 & 0 \\ 0 & A_{11} & 0 \\ 0 & 0 & A_{11} \end{matrix}$	$\infty/\infty 2$	Arbitrară
Tensor axial	$\begin{matrix} A_{11} & 0 & 0 \\ 0 & A_{11} & 0 \\ 0 & 0 & A_{33} \end{matrix}$	$\infty 2$	Axa ∞ coincide cu axa Z
	$\begin{matrix} A_{11} & 0 & 0 \\ 0 & A_{22} & 0 \\ 0 & 0 & A_{33} \end{matrix}$	222	Axele 2 coincid cu axele X, Y, Z
	$\begin{matrix} A_{11} & 0 & 0 \\ 0 & -A_{11} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix}$	$\bar{4}2m$	Axa $\bar{4}$ coincide cu axa Z; axele 2 coincid cu axele X și Y
Vector polar	$\begin{matrix} 0 & -A_{12} & 0 \\ A_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix}$	∞mm	Axa ∞ coincide cu axa Z
Combinația pseudoscalarului cu vectorul polar	$\begin{matrix} A_{11} & -A_{12} & 0 \\ A_{12} & A_{11} & 0 \\ 0 & 0 & A_{11} \end{matrix}$	∞	Axa ∞ a vectorului polar coincide cu axa Z

Scanned with OKEN Scanner

Combinația tensorului axial cu vectorul polar			
$\begin{matrix} A_{11} & -A_{12} & 0 \\ A_{12} & A_{11} & 0 \\ 0 & 0 & A_{33} \end{matrix}$	∞	Axele ∞ ale tensorului axial și vectorului polar coincid cu axa Z
$\begin{matrix} A_{11} & 0 & 0 \\ 0 & A_{11} & -A_{23} \\ 0 & A_{23} & A_{33} \end{matrix}$	2	Axa ∞ a tensorului axial coincide cu axa Z; axa ∞ a vectorului polar coincide cu axa X
$\begin{matrix} A_{11} & -A_{12} & 0 \\ A_{12} & A_{22} & 0 \\ 0 & 0 & A_{33} \end{matrix}$	2	Axele 2^- ale tensorului axial coincid cu axele X, Y și Z; axa ∞ a vectorului polar coincide cu axa Z
$\begin{matrix} A_{11} & -A_{12} & A_{13} \\ A_{12} & A_{11} & -A_{23} \\ -A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{matrix}$	1	Axa ∞ a tensorului axial coincide cu axa Z; axa ∞ a vectorului polar este orientată arbitrar față de axele X, Y și Z
$\begin{matrix} A_{11} & -A_{12} & A_{13} \\ A_{12} & A_{22} & -A_{23} \\ -A_{13} & -A_{23} & A_{33} \end{matrix}$	1	Axa 2 a tensorului axial coincide cu axele X, Y, Z; axa ∞ a vectorului polar este orientată arbitrar în raport cu aceste axe
$\begin{matrix} A_{11} & -A_{12} & 0 \\ A_{12} & -A_{11} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix}$	$mm2$	Axa $\bar{4}$ a tensorului axial coincide cu axa Z; axa ∞ a vectorului polar coincide cu axa Z
$\begin{matrix} A_{11} & -A_{12} & A_{13} \\ A_{12} & -A_{11} & -A_{13} \\ -A_{13} & A_{13} & 0 \end{matrix}$	m	Planul de simetrie face un unghi de 45° cu axele X și Y și trece prin axa Z

Scanned with OKEN Scanner

Nu toate formele canonice au simetrie diferită în cazul tensorilor axiali. Numărul total de grupuri de simetrie ale unui tensor axial de ordinul doi este egal cu 10. Formele canonice principale şi simetria acestor tensori sînt date în tabelul 10. Toţi tensorii axiali de ordinul doi nu au centru de simetrie. Din cele 10 grupuri de simetrie ($\infty/\infty 2$, $\infty 2$, 222, $\bar{4}2m$, ∞mm, ∞, 2, 1, $mm2$, m) patru grupuri ($\infty/\infty 2$, $\infty 2$, ∞mm şi ∞) sînt grupuri limită Curie. Primele trei dintre aceste patru au fost deja întîlnite mai înainte. Ultimul descrie conul de rotaţie (vezi fig. 7, a). Cele patru grupuri plus trei grupuri ale tensorului polar ($\infty/\infty/mmm$, ∞/mmm şi ∞/m) reprezintă toate şapte grupuri limită de simetrie Curie.

1.5. GRUPURILE DE SIMETRIE ALE TENSORILOR ŞI GRUPURILE DE SIMETRIE ALE FIGURILOR DE DIMENSIUNI FINITE

a) LEGĂTURA DINTRE SIMETRIA TENSORILOR ŞI SIMETRIA CRISTALELOR

În afară de cele şapte grupuri limită Curie, printre grupurile de simetrie ale tensorilor de ordinul doi există nouă grupuri care reprezintă grupurile de simetrie ale cristalelor. În afară de acestea, considerînd superpoziţia elementelor de simetrie a unui tensor polar şi altuia axial, se poate obţine încă un grup cristalografic — grupul $\bar{4}$. Acesta rezultă din compunerea elementelor de simetrie ale tensorului de grup $\bar{4}2m$ cu elementele de simetrie ale grupului vectorului axial ∞/m, în cazul cînd axele $\bar{4}$ şi ∞ coincid. Numărul total de gruprui cristalografice, care se întîlnesc printre grupurile de simetrie ale tensorilor, este deci — pe baza celor spuse mai înainte — zece. Acestea sînt : $\bar{4}2m$, $\bar{4}$, $mm2$, m, mmm, $2/m$, 222, 2, $\bar{1}$, 1. Ele acoperă domeniul grupurilor sistemelor cristalografice de ordin inferior (triclinic, monoclinic, rombic). Două dintre grupuri, şi anume $\bar{4}2m$ şi $\bar{4}$, sînt grupuri ale sistemului tetragonal.

Că printre grupurile de simetrie ale tensorilor de ordinul doi nu există alte grupuri cristalografice, decît cele menţionate, este o consecinţă a faptului că tensorii de ordinul doi nu pot avea, în general, axe de simetrie de ordin mai mare decît doi, deşi au axe de simetrie de ordin infinit. Se pot obţine, totuşi şi alte grupuri cristalografice prin înlocuirea axelor ∞ cu axe

Scanned with OKEN Scanner

cristaline de ordin superior lui doi. O asemenea alegere dă grupurile : $6/mmm$, $4/mmm$, $\bar{6}m2$ din grupul ∞/mmm; grupurile 622, 422, 32 din $\infty\,2$; grupurile $6/m$, $4/m$, $\bar{6}$ din ∞/m; grupurile $6mm$, $4mm$, $3m$ din $\infty\,mm$; grupurile 6, 4, 3 din ∞. Grupul $\infty/\infty/mmm$ împreună cu grupurile subordonate lui (vezi fig. 9) dă grupurile cristalelor cubice $m3m$, $m3$, $\bar{4}3m$, 432 și 23*. Numărul total de noi grupuri cristalografice, obținute în modul acesta, este 20. Ultimele două grupuri care au mai rămas — $\bar{3}m$ și $\bar{3}$ — pot fi obținute din grupul $6/mmm$. La rîndul lor, grupurile aproape limită $\bar{3}m(\overline{\infty}m)$ și $\bar{3}(\overline{\infty})$ sînt subordonate grupului ∞/mmm, care este grupul de simetrie al tensorilor polari. Astfel, grupurile cristalografice de simetrie pot fi deduse din grupurile de simetrie ale tensorilor de ordinul doi. Mai mult, de la acești tensori provin, în ultimă instanță, toate seriile de grupuri de simetrie ale figurilor de dimensiuni finite (vezi tabelul 2).

Cînd am discutat despre simetria cristalelor în §1.3 am găsit combinații posibile de elemente de simetrie care nu sînt în discordanță cu rețeaua cristalină. O asemenea cale de abordare a simetriei cristalelor este pur geometrică și nu rezolvă problema referitoare la cauza pentru care unele combinații de atomi și molecule duc anume la o clasă de simetrie dată.

Nu există îndoieli în privința faptului că simetria unui cristal este determinată de forțele de interacțiune dintre particulele ce compun cristalul. Aceasta ne permite să privim știința despre simetrie nu numai ca un studiu poziționat, geometric, al figurilor, ci și ca un studiu în care interacțiunile reale și legăturile reale dintre particule sînt descrise luînd în considerare geometria legăturilor și a particulelor. După cum s-a mai spus, o interacțiune poate fi electrostatică, magnetică, moleculară etc. Analiza tuturor tipurilor concrete de interacțiuni este o problemă complexă. Din punct de vedere al simetriei nu este necesară o asemenea analiză, ci este suficient să știm interacțiunile cele mai simple, din care — combinate între ele și cunoscîndu-le simetria —, pot rezulta toate celelalte. Problema tipurilor de interacțiuni posibile va fi analizată mai amănunțit în cele ce urmează.

Pentru simplitate, nu vom considera interacțiunea fiecărei particule cu celelalte particule din rețeaua cristalină, ci numai *rezultanta* acest interacțiuni. *O asemenea abordare a problemei face ca varietatea grupurilor de simetrie ale cristalelor să poată*

* Ultimele două grupuri pot fi considerate, de asemenea, ca subordonate grupului $\infty/\infty 2$ al tensorului menționat.

fi tratată ca varietate a simetriei rezultantelor interacţiunilor dintre particule. Un astfel de studiu al simetriei cristalelor poate fi făcut în două moduri. În primul rînd, se poate găsi pentru fiecare grup de simetrie a cristalelor o combinaţie de mărimi scalare, vectoriale şi tensoriale care *să nu contrazică simetria* cristalului. Această cale va fi folosită în capitolul 3 atunci cînd se vor analiza proprietăţile fizice ale cristalelor. În al doilea rînd, se poate încerca a se arăta simplu că fiecare clasă de cristale este rezultatul interacţiunii particulelor care formează reţeaua cristalină. La un asemenea studiu se vor alege, deci, interacţiunile *care conduc* la un grup de simetrie sau altul. Această cale poate fi considerată drept o nouă metodă de deducere a grupurilor de simetrie punctuale ale cristalelor.

Ambele moduri de abordare a studiului simetriei cristalelor pot fi numite interpretare fizică a grupurilor de simetrie cristalografice. Aici vom alege cea de a doua cale. Se poate arăta că folosirea interacţiunilor descrise numai de tensori de ordinul doi (scalare, vectoriale sau tensoriale propriu-zise) este suficientă pentru descrierea simetriei tuturor cristalelor. Vom da în continuare exemple de deducere a cîtorva grupuri de simetrie ale cristalelor, cu această metodă. Pentru simplitate, în cele ce urmează vom considera că rezultantele interacţiunilor sînt exterioare în raport cu cristalul (cu paralelipipedul primitiv de bază).

În absenţa oricăror influenţe din afară, spaţiul ocupat de particulele care formează o reţea periodică tridimensională va avea simetria cea mai înaltă. Grupul punctual de simetrie al unui astfel de spaţiu va fi grupul $m3m$. Aceasta este simetria pe care o are, de exemplu, reţeaua cubică simplă, în ale cărei noduri sînt distribuite uniform sfere izotrope.

Să alegem paralelipipedul elementar corespunzător acestei reţele (în cazul dat — un cub) şi să vedem ce grupuri de simetrie punctuale vor descrie acest cub după ce el îşi va modifica simetria sub diferite influenţe fizice. Evident, o acţiune scalară (de exemplu, comprimare din toate direcţiile (uniformă), a cărei simetrie este $\infty/\infty/mmm$) nu va modifica simetria cubului, dar o acţiune pseudoscalară (de exemplu, o răsucire uniformă, cu simetria $\infty/\infty 2$) va conduce la un nou grup de simetrie : 432.

Să considerăm acum o acţiune polar-tensorială asupra cubului. Întinzînd cubul (simetria unei asemenea acţiuni este ∞/mmm) după axa de ordinul patru obţinem paralelipipedul de bază al singoniei tetragonale (simetria $4/mmm$), întinzîndu-l după axa de ordinul doi rezultă paralelipipedul singoniei rombice (simetria mmm), iar după axa de ordinul trei — paralelipipedul sis-

Scanned with OKEN Scanner

temului romboedric (simetria $\bar{3}m$); dacă întindem cubul după o direcţie oarecare situată în planul de simetrie, dar care să nu coincidă cu nici una dintre axe, obţinem paralelipipedul singoniei monoclinice (simetria $2/m$); întinzînd cubul într-o direcţie absolut oarecare obţinem paralelipipedul singoniei triclinice (simetria $\bar{1}$). Paralelipipedul sistemului hexagonal se obţine şi el prin deformarea cubului, dar el nu este simplu, ci se compune din trei paralelipipede rombice la baza cărora se află romburi cu unghiurile de 120° şi 60°. În acest sens, sistemul hexagonal

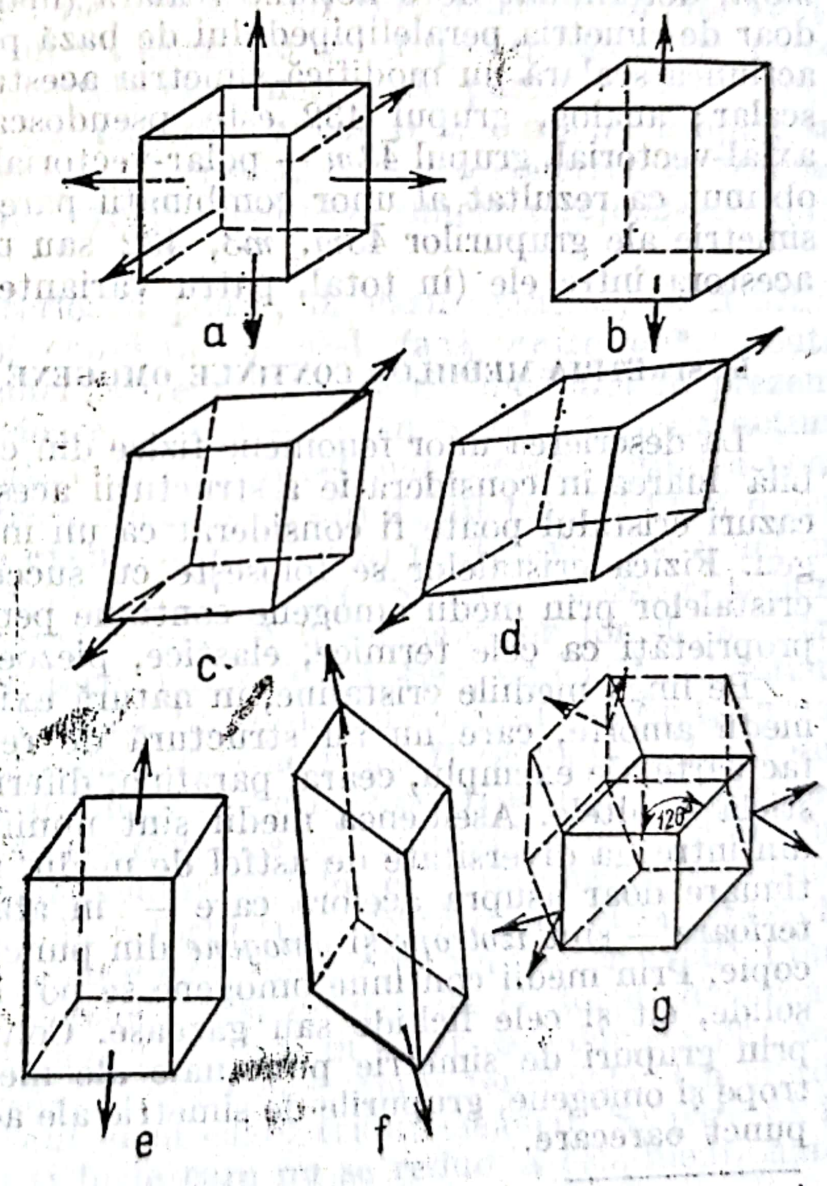


Fig. 25. Paralelipipedul de bază (elementar) al tuturor sistemelor ca rezultat al acţiunii polar-tensoriale asupra unui cub:
a — cubic (grupul $m3m$); b — tetragonal (grupul $4/mmm$); c — rombic (grupul mmm); d — romboedric (grupul $\bar{3}m$); e — monoclinic (grupul $2/m$); f — triclinic (grupul $\bar{1}$); g — hexagonal (grupul $6/mmm$).

nu este simplu şi de sine stătător, ci reprezintă un caz particular a sistemului rombic. Formele paralelipipedelor elementare ale tuturor singoniilor sînt reprezentate în fig. 25.

Scanned with OKEN Scanner

Aşadar, pornind doar de la periodicitatea tridimensională a reţelei cristaline şi considerînd o acţiune polar-tensorială efectuată asupra acesteia, se obţine o serie de grupuri de simetrie ale cristalelor. Restul grupurilor se poate găsi folosind alte acţiuni (axial-tensoriale, vectoriale, axial-vectoriale) şi combinaţii ale acestora. O parte dintre cominaţii vor fi date în capitolul 2. Atrage atenţia faptul că unele grupuri de simetrie pot fi obţinute ca rezultat al diferitelor superpoziţii. Cel mai des se întîlneşte aceasta la grupurile de simetrie inferioară ale fiecărui sistem, iar, în particular, şi la sistemele cubice. Astfel, grupul $m3m$, determinat de o acţiune scalară (mai precis, determinat doar de simetria peralelipipedului de bază primitiv, cu toate că acţiunea scalară nu modifică simetria acestuia), poate fi numit scalar; analog, grupul 432 este pseudoscalar, grupul $m3$ — axial-vectorial, grupul $\bar{4}3m$ — polar-vectorial. Grupul 23 poate fi obţinut ca rezultat al unor combinaţii pare ale elementelor de simetrie ale grupurilor $\bar{4}3m$, $m3$, 432 sau unor combinaţii ale acestora între ele (în total, patru variante)*.

b) SIMETRIA MEDIILOR CONTINUE OMOGENE

La descrierea unor fenomene fizice din cristale nu este posibilă luarea în consideraţie a structurii acestora. În asemenea cazuri cristalul poate fi considerat ca un mediu continuu omogen. Fizica cristalelor se foloseşte cu succes de reprezentarea cristalelor prin medii omogene continue pentru descrierea unor proprietăţi ca cele termice, elastice, piezoelectrice ş.a.

Pe lîngă mediile cristaline, în natură există o mare clasă de medii amorfe, care nu au structură de reţea. Dintre acestea fac parte, de exemplu, ceara, parafina, diferite tipuri de smoală, sticla şi altele. Asemenea medii sînt numite *continue*. Totuşi, din întreaga diversitate de astfel de medii, ne vom opri în continuare doar asupra acelora care — în absenţa acţiunilor exterioare — sînt *izotrope* şi *omogene* din punct de vedere macroscopic. Prin medii continue omogene se pot înţelege atît mediile solide, cît şi cele lichide sau gazoase. Convenim să înţelegem prin grupuri de simetrie punctuale ale mediilor continue izotrope şi omogene, grupurile de simetrie ale acestor medii într-un punct oarecare.

---

* Faptul că grupurile $m3$, $\bar{4}3m$, 23 nu se obţin numai ca rezultat al acţiunilor scalare şi pseudoscalare asupra cubului a servit mai sus drept bază pentru luarea în considerare a grupurilor aproape limită $\infty/\infty/m$, $\infty/\infty mm$ şi ∞/∞ (vezi fig. 8).

Scanned with OKEN Scanner

În absenţa acţiunilor exterioare, mediile continue izotrope şi omogene pot fi raportate la două grupuri de simetrie punctuale, şi anume la grupurile $\infty/\infty/mmm$ şi $\infty/\infty 2$ (sferă cu plane de simetrie şi sferă fără plane de simetrie, de exemplu o sferă ale cărei diametre, toate, sînt răsucite cu acelaşi unghi şi în acelaşi sens).

Un mediu real poate avea simetria $\infty/\infty/mmm$ în cazul cînd particulele ce-l compun au fie elemente de speţa întîi (axe simple) şi de speţa a doua (axe de oglindire), fie numai elemente de simetrie de prima speţă cu condiţia ca numărul particulelor stîngi şi drepte să fie identic, iar poziţionarea lor în spaţiu să fie la fel. Mediul va aparţine de grupul de simetrie $\infty/\infty 2$ în cazul cînd elementele de simetrie ale particulelor lui vor fi doar axe simple, iar particulele vor fi sau numai drepte, sau numai stîngi. Exemplu de mediu care are simetria $\infty/\infty/mmm$ este parafina topită, iar de mediu cu simetria $\infty/\infty 2$ — o soluţie de zahăr în apă.

O acţiune exterioară poate, în cazul general, să modifice simetria mediului coniderat şi să-l facă *anizotrop**. Pentru rezolvarea problemei: care va fi simetria mediului în prezenţa unei acţiuni exterioare, trebuie să ştim ce fel este acea acţiune şi care este simetria ei. În cazul cel mai general acţiunea poate fi mecanică, electrică, magnetică sau de alt tip. Pe lîngă o acţiune de un fel (de exemplu, mecanică) poate avea loc o acţiune de alt fel (de exemplu, electrică). Simetria acestor acţiuni, precum şi ordonarea reciprocă a elementelor lor de simetrie poate fi de asemenea cea mai diferită. Se poate arăta că într-un punct oarecare al unui mediu continuu omogen şi infinit, ansamblul forţelor care acţionează acolo poate fi redus la mărimi descrise de tensori de ordinul doi. Acestea pot fi acţiuni scalare, vectoriale şi tensoriale propriu-zise, precum şi combinaţii ale lor. În cazul bidimensional suma forţelor care acţionează în punctul dat poate fi redusă la o forţă (un vector polar) şi la o pereche de forţe (la o combinaţie care determină un vector axial). Compunerile de forţe concurente şi de perechi de forţe concurente de obicei nu se iau în consideraţie în acest caz, dar ele sînt cele care reflectă diferitele cazuri de acţiuni tensoriale. Un studiu analog poate fi făcut şi în cazul tridimensional. Se pare că în natură pot exista şi forţe care nu se reduc la cele menţionate.

---

* În acest caz (ca şi în cazul cristalelor) modificarea simetriei trebuie tratată, din punct de vedere fizic, ca rezultat al variaţiei interacţiunii dintre particulele mediului.

Scanned with OKEN Scanner

Totuşi, aici vom înţelege prin simetrie a mediilor continue omogene simetria acestora sub acţiunea forţelor exterioare descrise doar de tensori de ordinul doi.

Aceasta înseamnă, de exemplu, că pentru o acţiune pur mecanică ne vom mărgini la cazurile în care întregul ansamblu de forţe ce acţionează asupra mediului poate fi redus fie la un vector polar — o forţă (deplasarea corpului), fie la un vector axial — o pereche (un cuplu) de forţe (rotirea corpului), sau la un tensor polar simetric — un ansamblu de două forţe orientate una către cealaltă (întindere, comprimare), or la un tensor axial simetric — două perechi de forţe identice, ale căror momente de rotaţie sînt orientate unul spre altul (răsucirea, torsionarea mediului). În cazurile cînd întinderea-comprimarea va fi din toate direcţiile acţiunea va fi scalară, iar în cazurile cînd răsucirea va fi din toate direcţiile — pseudoscalară.

Dacă ne mărginim la acţiuni descrise de tensori polari şi axiali, problema simetriei acestor acţiuni se rezolvă simplu. Aşa cum s-a arătat în § 1.3 (vezi tabelele 9 şi 10), există şase grupuri de simetrie ale tensorului polar de ordinul doi : $\infty/\infty/mmm$, ∞/mmm, mmm, ∞/m, $2/m$, $\bar{1}$ şi zece grupuri de simetrie ale tensorului axial : $\infty/\infty 2$, $\infty 2$, 222, $\bar{4}2m$, ∞mm, ∞, 2, 1, $mm2$, m. Pentru determinarea tuturor grupurilor de simetrie ale acţiunilor descrise de tensori de odinul doi trebuie să cunoaştem, de asemenea, la ce grupuri noi poate duce compunerea elementelor de simetrie ale tensorilor polari şi axiali. Analiza arată că asemenea cominaţii vor duce în toate cazurile, cu excepţia unuia, la cele 16 grupuri menţionate. Nou va fi doar grupul $\bar{4}$, care poate fi reprezentat ca superpoziţia elementelor de simetrie ale tensorului (1.17) (grupul $\bar{4}2m$) cu elementele de simetrie ale tensorului (1.14), adică ale vectorului axial, cu condiţia ca axa $\bar{4}$ a vectorului axial să coincidă cu axa $\bar{4}$ a tensorului (1.17).

Numărul total de grupuri ale acţiunilor va fi, astfel, egal cu 17. Aceste 17 grupuri pot fi considerate, de asemenea, ca grupuri de simetrie ale cîmpurilor scalare, vectoriale şi tensoriale*.

Simetria unei acţiuni reprezintă în fapt grupurile posibile de simetrie ale mediilor continue omogene. Într-adevăr, pornind numai de la un singur grup de simetrie al mediilor continue omogene şi izotrope, şi anume de la grupul $\infty/\infty/mmm$, se pot obţine toate celelalte. Pentru aceasta este necesar să considerăm

* Aici numai tensori de ordinul doi, atît polari, cît şi axiali.

Scanned with OKEN Scanner

superpoziţia elementelor de simetrie ale grupului $\infty/\infty/mmm$ cu elementele de simetrie ale unuia dintre cele 17 grupuri ale tensorilor de ordinul doi şi ale combinaţiilor lor într-un punct oarecare. Întrucît grupul $\infty/\infty/mmm$ este grupul de simetrie punctuală cea mai înaltă, el conţine toate elementele de simetrie ale tuturor celor 17 grupuri. Aceasta înseamnă că, în concordanţă cu principiul compunerii simetriei (vezi § 1.2), elementele comune pentru oricare dintre cele 17 grupuri în combinaţie cu grupul $\infty/\infty/mmm$ vor fi toate elementele grupului considerat. Cu alte cuvinte, prin asemenea combinaţii, grupul care se obţine va coincide cu grupul de simetrie al respectivei acţiuni. În cazul acţiunii scalare (de exemplu, la o comprimare din toate direcţiile; simetria $\infty/\infty/mmm$) se conservă simetria mediului iniţial.

Aflarea grupurilor de simetrie ale mediilor continue omogene se poate face şi folosind un mediu iniţial izotrop cu simetria $\infty/\infty 2$. Natural că aici este, de asemenea, utilizabil principiul superpoziţiei simetriei. În acest caz, acţiunile a căror simetrie este $\infty/\infty/mmm$ şi $\infty/\infty 2$ conservă simetria mediului, iar acţiunile care au cea mai joasă simetrie, coboară ordinul simetriei iniţiale a mediului. Mediul nu capătă neapărat simetria acţiunii, totuşi noul grup de simetrie va fi neapărat unul dintre grupurile de simetrie ale acţiunii exterioare, citate mai înainte.

Ca ilustrare a celor spuse putem da următoarele exemple. Superpoziţia grupurilor de simetrie $\infty/\infty/mmm$ şi ∞mm conduce la grupul ∞mm, a grupurilor $\infty/\infty/mmm$ şi $2/m$ — la grupul $2/m$, a grupurilor $\infty/\infty 2$ şi ∞/m — la grupul ∞ ş.a.m.d. Exemplele pot fi asociate unor procese fizice reale. Astfel, mediul care are simetria $\infty/\infty/mmm$ capătă în cîmp electric simetria ∞mm (prepararea electreţilor); mediul cu aceeaşi simetrie capătă în cîmp magnetic simetria ∞/m (magnetizarea mediului şi prepararea magneţilor permanenţi); comprimarea bidimensională (simetria unei asemenea comprimări este ∞/mmm) a unui mediu a cărui simetrie este $\infty/\infty 2$ face să scadă ordinul simetriei mediului pînă la $\infty 2$ ş.a.m.d.

Generalizînd cele spuse aici, conchidem că grupurile punctuale de simetrie ale mediilor continue omogene, situate în cîmpuri scalare, vectoriale şi tensoriale sînt în total următoarele: $\infty/\infty/mmm$, $\infty/\infty 2$, ∞/mmm, ∞/m, $\infty 2$, ∞mm, ∞, $\bar{4}2m$, $\bar{4}$, mmm, $mm2$, 222, $2/m$, m, 2, $\bar{1}$, 1. Reprezentările geometrice corespunzătoare celor 17 grupuri punctuale sînt date în fig. 26. Acest ansamblu de grupuri conţine: toate cele şapte grupuri punctuale limită din cadrul simetriei Curie a cristalelor, două grupuri care coincid

Scanned with OKEN Scanner

cu grupurile de simetrie ale singoniei tetragonale și toate grupurile de simetrie ale cristalelor din singoniile triclinică, monoclinică și rombică.

În capitolele 2 și 3, pe lîngă grupurile punctuale ale cristalelor, vor fi analizate și grupurile de simetrie ale mediilor continue omogene.

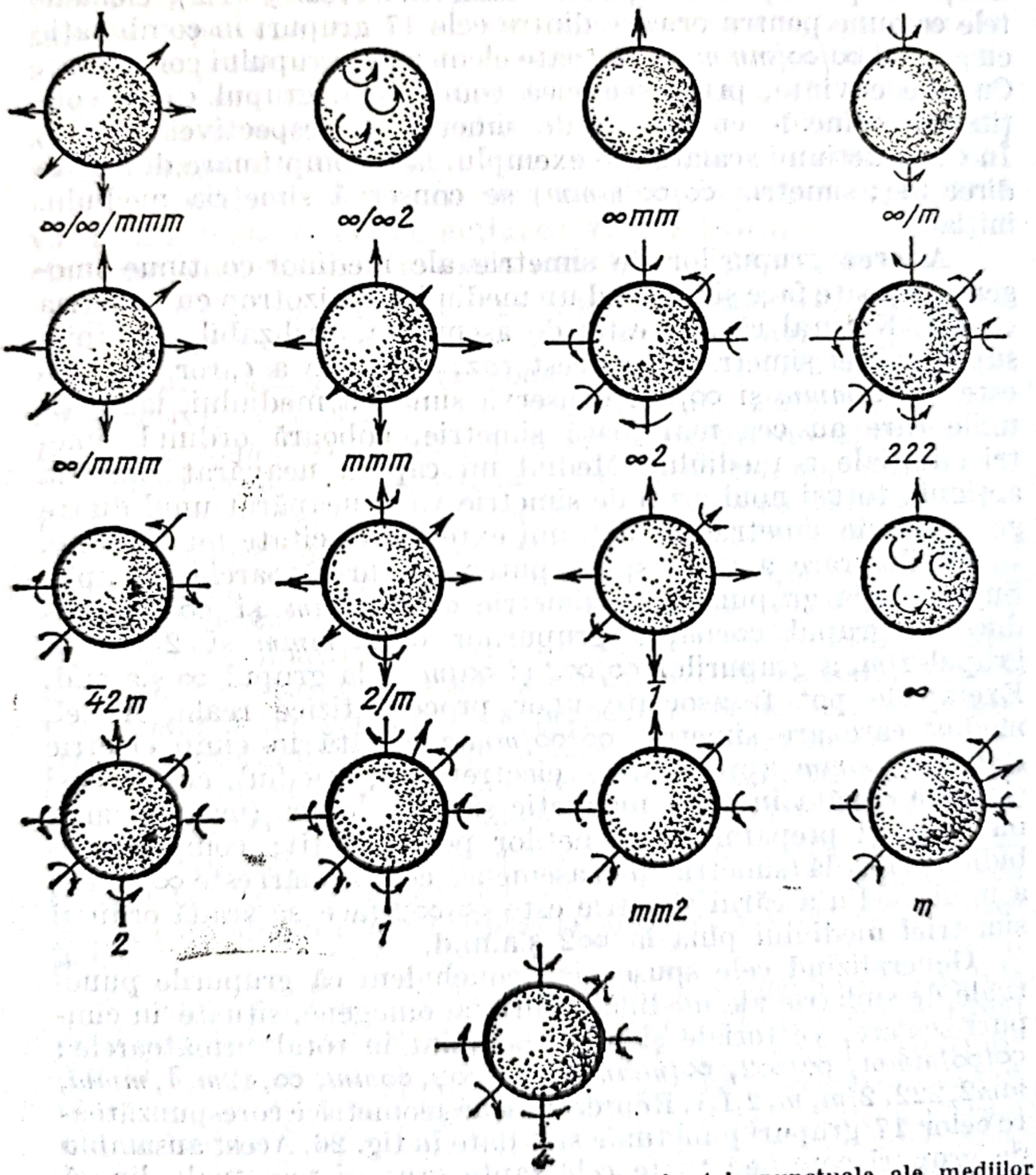


Fig. 26. Reprezentări geometrice ale grupurilor de simetrie punctuale ale mediilor continue omogene.

Scanned with OKEN Scanner

Capitolul 2

SIMETRIA COMPLETĂ (TOTALĂ)

2.1. SIMETRIA PUNCTUALĂ GENERALIZATĂ (ANTISIMETRIA, SIMETRIA MAGNETICĂ, SIMETRIA COMPLETĂ)

În cele expuse pînă aici, vorbind despre simetria figurilor n-am subliniat faptul că am analizat numei figurile *monocolore*, care puteau fi, totuşi, drepte sau stîngi (sau care puteau să conţină parte dreaptă şi parte stîngă). Astfel, în studiul simetriei dat în cadrul capitolului 1 nu există o comportare egală faţă de cele două proprietăţi importante ale figurilor : existenţa culorii şi existenţa semnului de enantiomorfism. Această neidentitate în comportare conţine două particularităţi. În primul rînd, s-a presupus că figurile au doar *o singură* culoare şi *două* semne de enantiomorfism. În al doilea rînd, o figură trebuia să aibă totdeauna o singură culoare determinată (nu putea fi incoloră), dar putea (ca întreg) să nu aibă deloc semnul de enantiomorfism determinat. În felul acesta, în expunerea noastră asupra simetriei era evidentă „nesimetria" comportării referitoare la caracteristicile fundamentale ale figurilor.

Problema comportării „nesimetrice" referitor la aceste caracteristici ale figurilor nu este ceva fără conţinut şi, aşa cum se va vedea în continuare, are un sens fizic important. Studiul ei a fost făcut pentru prima oară, în cadrul teoriei grupal-formale, de către H. Heesch *. Mai tîrziu, în deceniul al cincilea, a fost prelucrată detaliat de către A. V. Şubnikov **.

---

* Heesch, H., Z. Krist. Leipzig, 71, 95, 1929.

** Şubnikov, A. V., *Simetria şi antisimetria figurilor finite*, Editura Academiei de ştiinţe a U.R.S.S., Moscova, 1951.

A. V. Şubnikov a extins studiul simetriei prin considerarea, pe lîngă tipurile cunoscute de identitate (egalitate) din simetria obişnuită (prin suprapunere şi prin oglindire), două noi forme de identitate : antiidentitate (anticoincidenţă) prin suprapunere şi antiidentitate prin oglindire. Conform acestei generalizări, operaţiile de antiidentitate prin suprapunere fac ca figurile (sau părţile lor, care au culori diferite) să se suprapună în urma rotaţiilor obişnuite urmate de schimbarea culorii figurii în culoarea „opusă". Operaţiile de antiidentitate prin oglindire suprapun figurile (sau părţile lor) prin rotaţii cu oglindire urmate de „recolorarea" figurilor cu culori „opuse" (antisimetrie, simetrie alb-negru sau simetrie „plus-minus"). Operaţia de schimbare a culorii din cadrul antisimetriei a primit denumirea de *antiidentitate* şi se notează cu simbolul $\underline{1}$. În modul acesta, antirotaţiile şi antirotaţiile cu oglindire sînt rezultatul unor operaţii de înmulţire, de forma $2 \cdot \underline{1}$, $4 \cdot \underline{1}$, ..., $\overline{2} \cdot \underline{1}$, $\overline{4} \cdot \underline{1}$, ... etc.

Numărul total de grupuri punctuale cristalografice, care se obţin printr-o asemenea generalizare, este egal cu 122 ; cele 32 grupuri din simetria obişnuită sînt considerate aici drept grupuri „polare", adică grupuri care descriu simetria figurilor ce au un semn determinat (culoarea) ; 58 sînt grupurile de „polaritate amestecată (mixtă)", adică acele grupuri care permit la figuri părţi de colorare „opusă" ; 32 sînt grupuri „gri", adică grupuri care descriu figurile cu o culoare neutră (gri) sau — ceea ce este acelaşi lucru — nu au deloc culoare. Pentru ultimele 32 grupuri operaţia $\underline{1}$ reprezintă operaţia de simetrie (antisimetrie), în timp ce pentru celelalte 90 operaţia $\underline{1}$ intră numai ca factor de înmulţire în produsul cu operaţiile simetriei obişnuite. Prin urmare, în cadrul antisimetriei se ridică într-un grad determinat nesimetricitatea în comportare referitoare la caracteristicile fundamentale ale figurilor, menţionată mai înainte.

În anul 1956, B.A. Tavger şi V.N. Zaiţev * au făcut o generalizare destinată descrierii proprietăţilor magnetice ale cristalelor, care a primit denumirea, în literatura de specialitate, de *simetrie magnetică*. Autorii acestei generalizări s-au folosit de indicaţia lui L.D. Landau şi E.M. Lifşit **, care afirmau că operaţia de inversiune a timpului R nu este operaţie de simetrie pentru fenomenele magnetice. Într-adevăr, la inversarea timpu-

---

* Tavger, B.A., Zaiţev, V.N., *Despre simetria magnetică a cristalelor*, Jurn. exp. i teor. fiz., **30**, 564, 1956.

** Landau, L.D., Lifşit, E.M., *Electrodinamica meditor contiune* (traducere din l. rusă), Editura tehnică, Bucureşti, 1968.

Scanned with OKEN Scanner

lui momentele magnetice (care pot fi asimilate cu niște curenți circulari) își schimbă sensul în cel opus. Astfel, pentru descrierea simetriei cristalelor magnetice se dezvăluie un nou grad de libertate : cristalele identice din punct de vedere al simetriei obișnuite pot avea o simetrie magnetică diferită dacă se iau în considerare orientările momentelor lor magnetice.

Se observă ușor că din punct de vedere al teoriei grupurilor simetria magnetică nu diferă de antisimetrie, chiar dacă tratarea acestor generalizări este diferită. Mai întîi de toate să remarcăm faptul că extinderea noțiunii de „simetrie" la antisimetrie se petrece ca rezultat al considerării celor două semne ce au în ultimă instanță un sens *scalar* (*culoare*, semnele plus și minus ș.a.m.d.)**. Întrucît semnele de enantiomorfism au caracter *pseudoscalar*, antisimetria face un pas determinat înspre paritate, prin trecerea la mărimi scalare și pesudoscalare. Generalizarea simetriei magnetice, în acest sens, aduce în consecință următoarele : în completare la cele două semne de enantiomorfism deja cunoscute (figuri și părți ale figurilor drepte sau stîngi), se introduc încă două mărimi — polii magnetici, care au de asemenea unul dintre cele două semne de enantiomorfism. Numărul grupurilor cristalografice din simetria magnetică și din antisimetrie este același.

Tratînd simetria magnetică cu ajutorul simetriei figurilor este de la sine înțeles că ar trebui să considerăm figuri fără culoare (gri), care pot fi drepte sau stîngi (sau să conțină astfel de părți), precum și să aibă momente magnetice orientate într-un anumit fel. În mod pur formal, în simetria magnetică se pot folosi și figurile bicolore din antisimetrie, luînd una dintre culori (de exemplu, cea albă) drept pol magnetic sud, iar cealaltă (cea neagră) drept pol nord. Totuși, este interesant că în cazul de față sensul noțiunii de „colorare" diferă de sensul care i se atribuie în cadrul antisimetriei : în antisimetrie „colorarea" schimbă semnul scalar, pe cînd în simetria magnetică îl modifică pe cel pseudoscalar.

Așadar, după cum s-a remarcat mai înainte, atît generalizarea care a căpătat denumirea de antisimetrie, cît și generalizarea denumită simetrie magnetică sînt, din punct de vedere al teoriei grupurilor, una și aceeași generalizare menită să descrie simetria figurilor care au perechi de mărimi „opuse", caracterizînd proprietățile figurilor sau ale fenomenelor. În cazul antisi-

---

* În studiul însuși asupra antisimetriei generalizarea ei în cazul scalar nu se subliniază și nu se tratează în mod special.

Scanned with OKEN Scanner

metriei se consideră semnele (culorile) figurilor, iar în cazul simetriei magnetice — semnele polilor magnetici. În legătură cu aceasta, operaţiile de antiidentitate din antisimetrie (operaţia de „colorare" a figurilor cînd se conservă semnul de enantiomorfism; operaţia $\underline{1}$) în simetria magnetică se pot pune în corespondenţă cu operaţia de inversare a timpului (operaţia de schimbare a semnului de enantiomorfism cînd se conservă culoarea figurii; operaţia R sau, de asemenea, $\underline{1}$).

Mai înainte am vorbit deja despre faptul că antisimetria face un pas determinat în domeniul comportării egale, identice (al parităţii) faţă de scalari şi pseudoscalari. Din păcate, aceasta nu se face deloc pe calea deducţiei, ceea ce se vede chiar din definiţia celor două noi tipuri de operaţii — antirotaţii şi antirotaţii cu oglindire. În ambele cazuri se schimbă numai culoarea figurii, semnul ei scalar. Pentru schimbarea semnului de enantiomorfism, însă, în antisimetrie se foloseste un tip vechi de operaţie — rotaţiile cu oglindire — şi altul nou — antirotaţiile cu oglindire. Astfel, prefixul „anti" ataşat denumirii operaţiilor se aplică în mod diferenţiat pentru semnele scalare şi pseudoscalare. Această circumstanţă, la prima vedere formală, face — aşa cum se va vedea mai departe — ca noţiunea de elemente de simetrie şi de antisimetrie să nu fie identică pentru scalari şi pseudoscalari, conduce la complicarea definiţiei superpoziţiei elementelor şi altele. În ultimă instanţă se ajunge la faptul că antisimetria — în sensul de mai sus — nu iese din cadrul descrierii simetriei figurilor bicolore.

În anul 1960 s-a introdus o nouă noţiune, aceea de *simetrie completă* (sau *totală*), după exemplul simetriei scalarilor, vectorilor şi tensorilor *. Din punct de vedere al teoriei grupurilor, această generalizare nu diferă de antisimetrie, în sensul că în ea se consideră, de asemenea, două perechi de semne opuse. În afară de aceasta, în simetria completă se subliniază în mod foarte strict caracterul scalar al uneia dintre aceste perechi. Mai departe, în simetria completă se realizează succesiv paritatea referitor la perechile scalare şi pseudoscalare: de exemplu, o antirotaţie este, în simetria completă, operaţia care modifică semnul scalar al figurii considerate (culoarea ei) şi semnul de enantiomorfism. Această paritate a perechilor scalare şi

---

* Jeludev, I. S., *Simetria completă a scalarilor, vectorilor şi tensorilor de ordinul doi*, Krista,ografia, 5, 3, 346, 1960; *Grupurile limită în simetria completă a scalarilor, vectorilor, tensorilor de ordinul doi şi a combinaţiilor lor*, Kristalografia, 5, 4, 508, 1960.

pseudoscalare merge şi mai departe : la pseudoscalari nu se consideră corect să se reprezinte semnul de enantiomorfism prin darea unei forme determinate — o asemenea particularitate a figurilor se subliniază prin aceea că li se atribuie un indice de „material" („drept", „stîng" sau „neutru" în raport cu semnul de enantiomorfism). Numărul total de grupuri cristalografice din simetria completă este egal cu 90 (adică 32 + 58). În simetria completă nu este necesar să avem figuri de culoare „gri". Printre grupuri există, totuşi, şi unele care descriu simetria figurilor ce nu au deloc semn scalar (adică „culoare"), precum şi figuri fără semn de enantiomorfism.

Operaţia de antiidentitate a unei figuri, simbolizată în simetria completă de asemenea cu $\underline{1}$, nu este de sine stătătoare pentru nici unul dintre cele 90 grupuri, ci intră numai în calitate de factor în produsul cu toate operaţiile simetriei obişnuite, în afară de operaţia 1 ($4 \cdot \underline{1} = \underline{4}$, $6 \cdot \underline{1} = \underline{6}$ ş.a.m.d). Operaţia $\underline{1}$ transformă în simetria completă, în egală măsură, o figură (sau părţile ei) în alta care are culoare (semn) opusă şi semn de enantiomorfism contrar. (Dacă figura are, în caz particular, numai una dintre aceste calităţi, ea se transformă în opusa ei, indiferent de ce fel este.) Vom observa că operaţia $\underline{1}$ astfel definită este echivalentă cu operaţia de *inversiune combinată* introdusă de L.D. Landau*. Astfel, operaţia de inversiune combinată corespunzătoare transformării unei particule în antiparticulă din fizica particulelor elementare este echivalentă cu operaţia $\underline{1}$ referitoare la transformarea unei figuri în antifigura corespunzătoare în cadrul simetriei complete. Noile tipuri de identităţi (egalităţi) obţinute ca rezultat al unei asemenea generalizări se numesc *paritate de antisuprapunere* şi *paritate de antioglindire*. Relaţia dintre operaţiile simetriei complete şi antisimetriei, precum şi esenţa transformărilor realizate cu acestea şi simbolizarea operaţiilor sînt date în tabelul 11.

Observăm că operaţiile introduse de noua simetrie (antirotaţii şi antirotaţii cu oglindire) sînt, într-adevăr, complet opuse operaţiilor corespunzătoare ale simetriei obişnuite (rotaţii şi rotaţii cu oglindire) prin caracterul transformărilor efectuate cu ele (sensul prefixului „anti"). Menţionăm, de asemenea, că, de exemplu operaţia de rotaţie cu antioglindire din simetria completă este echivalentă cu operaţia de antirotaţie din cadrul

---

* L a n d a u, L. D., *Asupra unei posibilităţi pentru proprietăţile de polarizare ale neutrinului*, Jurn. exp. i teor. fiz., 32, 2, 407, 1957.

Scanned with OKEN Scanner

Tabelul 11

Relaţiile dintre operaţiile de antisimetrie şi operaţiile simetriei complete

Antisimetria			Simetria completă		
Denumirea operaţiei	Esenţa transformării *	Simbolizarea operaţiilor	Denumirea operaţidl	Esenţa transformării *	Simbolizarea operaţiei
Rotaţii	$\overset{+}{\Pi} \rightarrow \overset{+}{\Pi}$	$1; 2; 3; \ldots$	Rotaţii	$\overset{+}{\Pi} \rightarrow \overset{+}{\Pi}$	$1; 2; 3; \ldots$
Rotaţii cu oglindire	$\overset{+}{\Pi} \rightarrow \overset{+}{\Lambda}$	$\bar{1}; \bar{2}; \bar{3}; \ldots$	Rotaţii cu oglindire	$\overset{+}{\Pi} \rightarrow \overset{+}{\Lambda}$	$\bar{1}; \bar{2}; \bar{3}; \ldots$
Antirotaţii	$\overset{+}{\Pi} \rightarrow \overset{-}{\Pi}$	$\underline{1}; \underline{2}; \underline{3}; \ldots$	Antirotaţii	$\overset{+}{\Pi} \rightarrow \overset{-}{\Lambda}$	$\underline{1}; \underline{2}; \underline{3}; \ldots$
Antirotaţii cu oglindire	$\overset{+}{\Pi} \rightarrow \overset{-}{\Lambda}$	$\underline{\bar{1}}; \underline{\bar{2}}; \underline{\bar{3}}; \ldots$	Antirotaţii cu oglindire	$\overset{+}{\Pi} \rightarrow \overset{-}{\Pi}$	$\underline{\bar{1}}; \underline{\bar{2}}; \underline{\bar{3}}; \ldots$

* Plusul şi minusul înseamnă culori ''opuse'' ale părţilor figurii — alb şi negru. Literele Π şi Λ simbolizează semnele de enantiomorfism ale părţilor figurii — dreaptă şi stîngă.

Scanned with OKEN Scanner

antisimetriei numai prin rezultatul final, dar nu este echivalentă prin modul în care se atinge acest rezultat (în simetria completă transformarea $\overset{+}{\Pi} \rightarrow \overset{-}{\Pi}$ se obţine ca rezultat al unei rotaţii cu oglindire, cu schimbarea semnului de enantiomorfism şi a culorii, în timp ce în cadrul antisimetriei aceasta este rezultatul unei rotaţii simple şi „recolorării"; analitic, aceste transformări se scriu diferit). O observaţie analogă poate fi făcută referitor la echivalenţa operaţiei de antirotaţie din simetria completă şi operaţiei de antirotaţie cu oglindire din cadrul antisimetriei (vezi tabelul 11).

Evident, nu există dificultăţi în tratarea grupurilor de antisimetrie cu ajutorul figurilor de dimensiuni finite, întrucît — în ultimă instanţă — antisimetria însăşi a fost dezvoltată pentru descrierea simetriei figurilor bicolore. Despre particularităţile tratării simetriei magnetice am vorbit mai înainte. În cadrul simetriei complete există, de asemenea, două particularităţi. Principala este, aşa cum s-a arătat deja, reprezentarea semnului de enantiomorfism nu prin forma figurilor, ci — dacă ne putem exprima aşa — prin conţinutul acestora, prin structura lor. În acest scop în simetria completă, spre deosebire de simetria obişnuită, nu se iau ca părţi elementare ale figurilor tetraedre asimetrice (vezi fig. 2), ci figuri cu totul lipsite (ca formă!) de semn de enantiomorfism. Cu asemenea figuri ne-am mai întîlnit. Astfel, sferele fără plane de simetrie reprezentate în fig. 7, f au semne de enantiomorfism, cu toate că după forma lor ar fi imposibil că li se atribuie asemenea semne.

În figurile 27 şi 28 sînt reprezentate „cărămizile" elementare pentru construirea figurilor în cadrul simetriei complete (tetraedrele analoge de formă generală din simetria obişnuită şi din antisimetrie; vezi, de exemplu, fig. 2). Se disting trei tipuri de sfere, în acest caz: sfere care au numai calitatea de scalar (două culori, semnele plus şi minus), numai semn de enantiomorfism (calitatea de pseudoscalar, drepte şi stîngi) şi calitatea de scalar şi pseudoscalar în acelaşi timp (patru variante). Sferele a şi b din fig. 27 sînt echivalente din punct de vedere al antisuprapunerii şi antioglindirii, iar sferele c şi d sînt echivalente din punct de valoare al oglindirii şi antisuprapunerii. Sferele a şi b din fig. 28 (precum şi c şi d) sînt echivalente din punct de vedere al antioglindirii, sferele a şi c (precum şi b şi d) — al oglindirii, sferele a şi d (ca şi b şi c) — al antisuprapunerii.

Vom da cîteva desene pentru o mai bună înţelegere a operaţiilor din simetria completă şi lămuirirea deosebirii de reprezen-

Scanned with OKEN Scanner

tare a figurilor în simetria completă şi în antisimetrie. În fig. 29 s-a reprezentat grupul 422 în cadrul simetriei complete şi al antisimetriei, în maniera tradiţională pentru aceste două generalizări. Observăm că grupul 422 este tratat în ambele

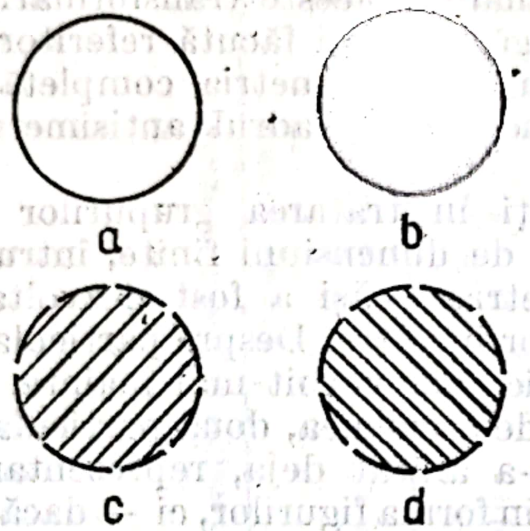


Fig. 27. Schiţă referitoare la semnificaţia operaţiilor din cadrul simetriei complete :

a — sferele *a* şi *b* nu au semn de enantiomorfism, nu se pot interschimba şi nici nu rezultă una din alta prin oglindire ; sferele c şi d nu au semn scalar (sînt de culoare gri), rezultă una din alta prin oglindire, dar nu se pot interschimba.

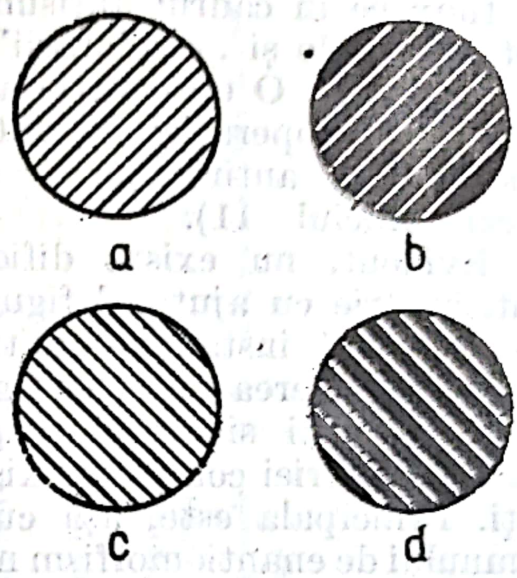


Fig. 28. Schiţă referitoare la semnificaţia operaţiilor din cadrul simetriei complete :

a — sferă pozitivă stîngă (albă) ; b — sferă negativă stîngă (neagră) ; c — sfera pozitivă dreaptă ; d — sferă negativă dreaptă. Sferele a şi b (ca şi c şi d) nu rezultă una din alta prin oglindire sferele a şi c (ca şi b şi d) rezultă prin oglindire, sferele a şi d (ca şi b şi c) nu se pot interschimba.

cazuri nu ca un grup obişnuit de simetrie, ci ca un grup *polar* (figurile care îl reprezintă au o singură culoare determinată). Pe lîngă aceasta, reprezentarea grupului nu diferă, desigur,

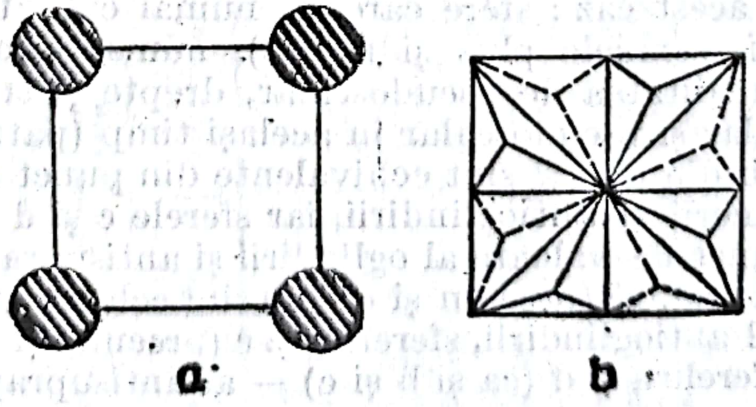


Fig. 29. Reprezentarea grupului 422 în cazul simetriei complete (a) şi în cazul antusimetriei (b).

principial de reprezentarea aceluiaşi grup 422 în cadrul simetriei obişnuite.

Pentru reprezentarea grupurilor simetriei complete în unele cazuri se pot folosi şi figuri de simetrie mai joasă decît sfera. Astfel, pentru grupurile cubice se pot folosi cuburi cu toate planele de simetrie (grupul $m3m$), pentru reprezentarea celor

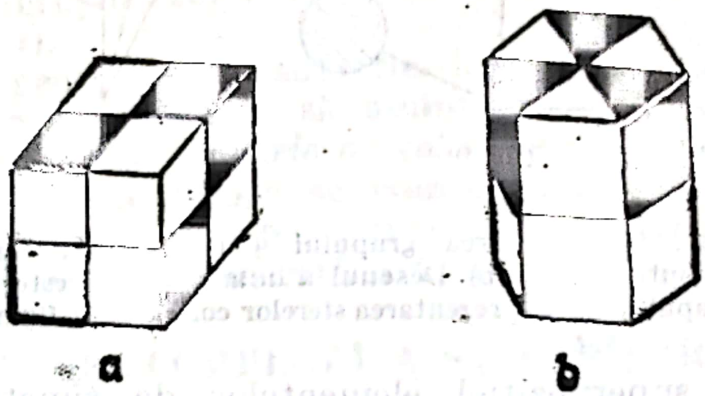


Fig. 30. Reprezentarea grupurilor $\underline{m}3m$ (a) şi $\underline{6}/\underline{m}m\underline{m}$ (b).

rombice — paralelipipede dreptunghice (grupul mmm) ş.a.m.d. Reprezentarea figurilor în acest mod, în cadrul simetriei complete, este arătată în fig. 30 pentru grupurile $\underline{m}3m$ şi $\underline{6}/\underline{m}m\underline{m}$. Este interesant de observat că grupurile simetriei complete şi antisimetriei reprezentate prin figurile din fig. 30 coincid. Această coincidenţă va avea loc, în general, totdeauna cînd figura considerată nu conţine părţi cu semn de enantiomorfism determinat (adică sînt gri după semnul de enantiomorfism).

În fig. 31 sînt reprezentate figuri a căror simetrie se notează la fel în simetria completă şi în antisimetrie — $\overline{4}$. Sferele din fig. 31, a au semn de enantiomorfism determinat şi, de aceea, grupul de antisimetrie al unei astfel de figuri va fi altul decît cel din simetria completă, şi anume grupul 2. La rîndul său, în simetria completă fig. 31, b este descrisă tot de grupul 2.

Neidentitatea comportării în raport cu scalarii şi pseudoscalarii din cadrul antisimetriei este deosebit de clară în fig. 32. Aici fig. 32, a reprezintă, în esenţă, o combinaţie de vector polar (scalari de culori diferite) şi vector axial (pseudoscalari cu semn de enantiomorfism diferit). Primul dintre aceşti vectori are (în cadrul antisimetriei) un antiplan de simetrie (perpendicular pe axa ∞), iar cel de-al doilea — un plan de simetrie, de asemenea perpendicular pe axa menţionată. Evident, conform

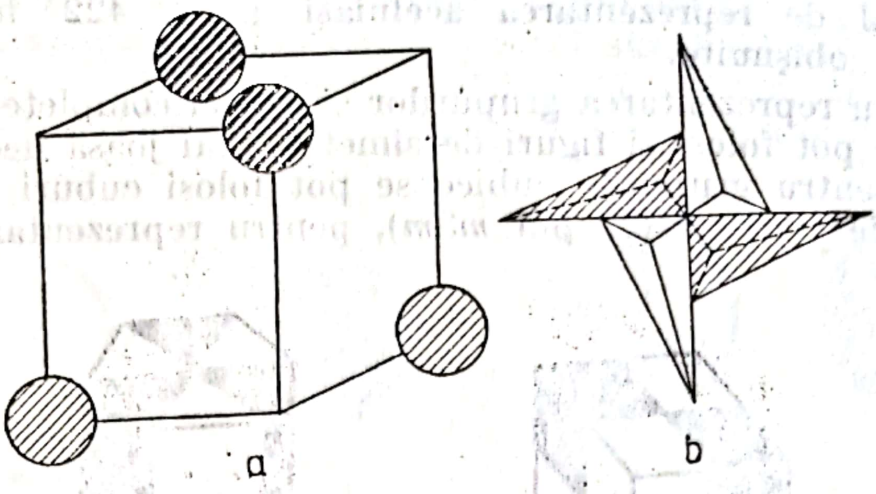


Fig. 31. Reprezentarea grupului $\bar{4}$ în simetria completă (a) și antisimetrie (b). Desenul a în antisimetrie este descris de grupul 222. (Reprezentarea sferelor corespunde figurii 28).

principiului superpoziției elementelor de simetrie (și antisimetrie), figura compusă nu poate avea nici plane de simetrie, nici antiplane de simetrie, perpendiculare pe axa ∞, în timp ce după regulile antisimetriei această figură, ca întreg, este considerată ca avînd un antiplan de simetrie *. O neconcordanță

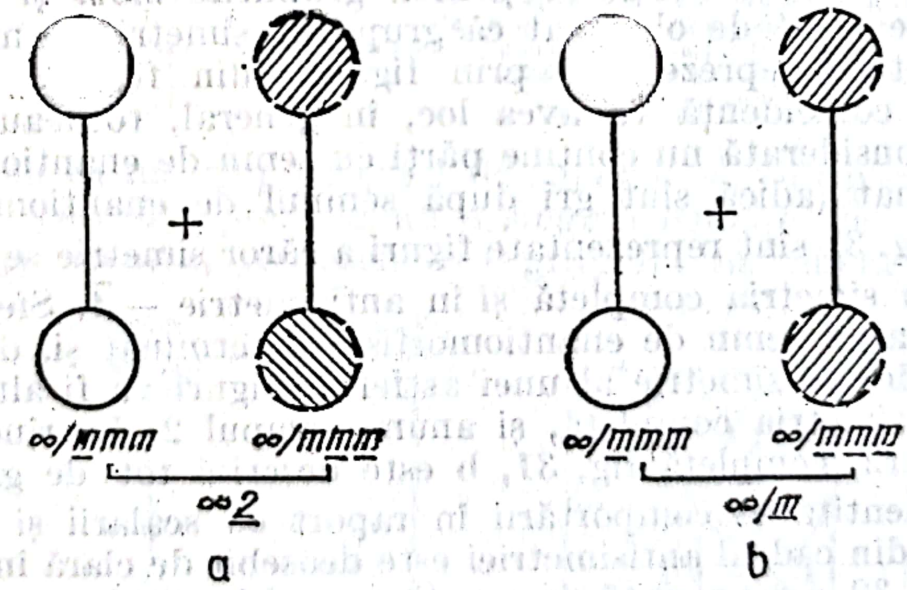


Fig. 32. Compunerea elementelor de simetrie completă:
a — compunerea vectorilor polar și axial; b — compunerea vectorului polar cu tensorul axial.

* Șubnikov, A. V., *Simetria și antisimetria figurilor finite*, Editura Academiei de științe a U.R.S.S., Moscova, 1951, p. 140.

Scanned with OKEN Scanner

similară are loc și pentru figurile din fig. 32, b referitor la axele 2 și $\underline{2}$, perpendiculare pe axa ∞. Este important să subliniem că în cadrul simetriei complete asemenea neconcordanțe nu există. Ambele părți ale figurii din desenul 32, a au o antiaxă $\underline{2}$, perpendiculară pe axa ∞, iar figurile din fig. 32, b — un antiplan. În concordanță cu aceasta, prima figură componentă își păstrează antiaxa $\underline{2}$ (grupul $\infty\underline{2}$), iar dea de-a doua — antiplanul (grupul $\infty/\underline{m}$).

Pe lîngă generalizările simetriei indicate aici există și alte cîteva. Dintre ele trebuie să amintim generalizarea care a primit denumirea de *simetrie de colorație* * .

În această generalizare se consideră figurile colorate cu cîteva culori. Fiecare dintre culori poare fi interpretată, desigur, ca o anumită calitate concretă a figurii.

2.2. SIMETRIA COMPLETĂ A SCALARILOR, VECTORILOR ȘI TENSORILOR

Reamintim că noțiunea de „simetrie completă" a fost introdusă prima oară pentru descrierea simetriei scalarilor, vectorilor și tensorilor. Din punct de vedere analitic, procedeul generalizării simetriei obișnuite se reduce, în cazul simetriei complete, la considerarea mărimilor cărora le pot fi atribuite două perechi de semne opuse (analitic, plus și minus). În acest caz, o pereche de semne are natură scalară, iar cealaltă—pseudoscalară. Fiecare mărime poate avea fie numai un semn scalar și numai unul pseudoscalar, fie numai unul dintre aceste semne. Cele opt posibilități care apar [scalar pozitiv — absența semnului de enontiomorfism; scalar pozitiv — semn de enantiomorfism pozitiv (drept); scalar pozitiv — semn de enantiomorfism negativ (stîng); scalar negativ — absența semnului de enantiomorfism; scalar negativ — semn de enantiomorfism pozitiv (drept); scalar negativ — semn de enantiomorfism negativ (stîng); o mărime care are semn pozitiv de enantiomorfism și nu are semn scalar; o mărime care are semn negativ de enantiomorfism și nu are semn scalar] sînt reprezentate formal în figurile 27 și 28.

Posibilitatea de a compara mărimile pozitive și negative deschide pentru acestea perspectiva de a avea, în cadrul simetriei complete, pe lîngă elementele de simetrie obișnuite, și ele-

* Șubnikov, A. V., Belov, N. V., *Coloured Symetry*, Pergamon Press, London, 1964.

mente de *simetrie complementară*. Să dăm definiţia elementelor de simetrie complementară ale tensorilor. Vom considera că: a) tensorul are ca element de simetrie complementară *o antiaxă* de ordin oarecare în cazul cînd, printr-o rotaţie simplă a sistemului de coordonate cu un unghi corespunzător ordinului acestei axe, *toate componentele tensorului îşi schimbă semnul în cel contrar* fără a-şi modifica valoarea absolută; b) tensorul are ca element de simetrie complementară *o axă de antioglindire* de ordin oarecare în cazul cînd, printr-o transformare a sistemului de coordonate corespunzătoare axei de oglindire de acelaşi ordin, *toate componentele tensorului îşi schimbă semnul în cel opus* fără a-şi modifica valoarea absolută.

Elementele de simetrie complementară — *antiaxe* şi *axe de antioglindire* — se vor simboliza în modul următor *

$$\underline{1};\ \underline{2};\ \underline{3};\ \ldots;\ \underline{\infty}\ —\ \text{antiaxe};$$

$$\overline{1};\ \overline{2};\ \overline{3};\ \ldots;\ \overline{\infty}\ (\overline{1} = \underline{m})\ ^{**}\ —\text{axe de antioglindire.}$$

Vom numi *simetrie completă* simetria tensorilor în care se ia în considerare şi simetria complementară; aici, ca şi în capitolul 1, vor fi consideraţi numai tensorii ortogonali afini, iar scalarii şi vectorii vor fi trataţi ca tensori de ordinul zero şi întîi, respectiv.

Cunoaşterea simetriei tensorilor care ne interesează uşurează problema, deoarece pentru aflarea simetriei complete este necesar doar să se verifice, cu ajutorul formelor canonice cunoscute ale tensorilor, ce elemente de simetrie complementară (antiaxe şi axe de antioglindire) au aceşti tensori şi dacă nu cumva diferă, ca simetrie completă, de tensorii care au aceeaşi simetrie obişnuită.

Studiul simetriei complete poate fi făcut atît pe cale pur analitică, cît şi cu ajutorul principiului de simetrie Curie (principiul superpoziţiei elementelor de simetrie). În ultimul caz, întrucît tensorul polar poate avea componente tensoriale propriu-zise (care determină un scalar, în caz particular) şi componente de vector axial, simetria tensorilor polari de

---

* Atragem atenţia încă odată că operaţia $\underline{1}$ din cadrul simetriei complete poate fi tratată drept operaţie de grup numai în combinaţie cu operaţiile simetriei obişnuite (cu excepţia operaţiei 1). În modul acesta, în simetria completă nu există elementul „antiaxă de ordinul întîi", ca element de simetrie de sine stătător.

** Aici în simbolizarea *elementelor* de simetrie din cadrul simetriei complete (la fel ca şi în cea obişnuită), linioara deasupra simbolului înseamnă axă de oglindire, iar în notarea *grupurilor* de simetrie aceeaşi linioară înseamnă axă de inversiune.

Scanned with OKEN Scanner

diferite tipuri poate fi aflată din considerarea superpoziției elementelor de simetrie și de simetrie complementară ale tensorului propriu-zișI (în cazul particular — ale scalarilor) și ale vectorului polar, fiind dată orientarea lor spațială. O observație analogă se referă și la tensorii axiali de ordinul doi, în care pot fi separate o parte pur tensorială (în caz particular — pseudoscalară) și o parte ce definește un vector polar.

Datorită simplității modurilor de tratare a problemei (moduri care duc, natural, la același rezultat), nu vom analiza în amănunțime toate formele posibile de tensori polari și axiali, ci ne vom opri numai asupra caracteristicilor cele mai importante și mai interesante ale simetriei complete a scalarilor, vectorilor și tensorilor.

a) SIMETRIA COMPLETĂ A SCALARILOR

Un scalar scris sub formă tensorială

$$\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{11} & 0 \\ 0 & 0 & a_{11} \end{bmatrix} \qquad (2.1)$$

are grupul de simetrie obișnuită $\infty/\infty/mmm$. Pentru scalari operațiile de simetrie sînt rotații simple și rotații cu oglindire după o direcție oarecare și de unghi oarecare. Cu alte cuvinte, pentru scalari nu există în simetria obișnuită operații care ar putea fi interzise. Datorită acestui fapt, în concordanță cu regulile menționate mai sus referitor la aflarea elementelor de simetrie în cadrul simetriei complementare — antirotații și rotații cu antioglindire —, un scalar nu poate avea elemente de simetrie complementară. Simetria lui este, deci, în întregime descrisă de elementele simetriei obișnuite și astfel simetria completă a scalarului coincide cu simetria obișnuită. Grupul lui de simetrie va fi notat în simetria completă, ca și mai înainte, cu simbolul $\infty/\infty/mmm$. Reprezentarea geometrică a scalarului va fi o sferă izotropă, colorată cu o singură culoare. În cadrul simetriei complete aceeași simetrie o va avea și sfera colorată cu culoarea „opusă" primei culori. Analitic aceasta înseamnă că scalarii pot fi atît pozitivi [vezi tensorul (2.1)] cît și negativi

$$\begin{bmatrix} -a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & -a_{11} & 0 \\ 0 & 0 & -a_{11} \end{bmatrix}.$$

Un pseudoscalar, scris sub formă tensorială

$$\begin{bmatrix} A_{11} & 0 & 0 \\ 0 & A_{11} & 0 \\ 0 & 0 & A_{11} \end{bmatrix} \qquad (2.2)$$

are grupul de simetrie obişnuită $\infty/\infty 2$. Pentru pseudoscalari operaţiile interzise în cadrul simetriei obişnuite sînt (vezi § 1.4) orice fel de rotaţii cu oglindire. La asemenea transformări ale sistemului de coordonate, conform regulilor de transformare a componentelor vectorului axial (vezi tabelul 8)

$$A'_{ik} = \pm\, c_{li} c_{mk} A_{lm}$$

(în acest caz se ia semnul minus) toate componentele tensorului (2.2) îşi inversează semnele, conservîndu-şi valoarea absolută. Aceasta reprezintă tocmai faptul că un pseudoscalar are orice operaţie de rotaţie cu antioglindire şi, în particular, axe de antioglindire $\underline{\infty}$, orientate după o direcţie oarecare. Întrucît pentru un pseudoscalar *toate operaţiile de rotaţie sînt permise*, el poate să nu aibă antiaxe, ca elemente de simetrie complementară. Simetria completă a pseudoscalarului poate fi notată, deci, cu simbolul $\infty/\infty/\underline{m}\underline{m}\underline{m}$. Reprezentarea geometrică a pseudoscalarului, care îi reflectă corect simetria, va fi sfera fără culoare („gri") cu diametre răsucite identic într-un singur sens. Sfera ale cărei diametre sînd răsucite în sens opus va fi descrisă de tensorul

$$\begin{bmatrix} -A_{11} & 0 & 0 \\ 0 & -A_{11} & 0 \\ 0 & 0 & -A_{11} \end{bmatrix} \qquad (2.3)$$

Tensorii (2.2) şi (2.3) descriu, respectiv, pseudoscalarii drept şi stîng.

b) SIMETRIA COMPLETĂ A VECTORILOR

Un vector axial scris sub formă tensorială

$$\begin{bmatrix} 0 & -a_{12} & 0 \\ a_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad (2.4)$$

are drept elemente de simetrie o axă ∞, care coincide cu axa Z a sistemului de coordonate ale tensorului, un plan de simetrie perpendicular pe această axă și un centru de simetrie. Operațiile de simetrie interzise pentru acest vector sînt axele de ordinul doi perpendiculare pe axa Z și planele care trec prin axa ∞ (grupul ∞/m). O simplă verificare ne arată că axele menționate sînt antiaxe de ordinul doi, iar planele — antiplane. Să ne convingem, de exemplu, de următoarele. Matricea cosinușilor, corespunzătoare reflexiei sistemului de coordonate în planul XY, are forma

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

În concordanță cu formulele de transformare a componentelor tensorilor polari (vezi tabelul 8)

$$a'_{ik} = c_{li}c_{mk}a_{lm}$$

obținem $a'_{12} = a_{12}$; $a'_{21} = -a_{12}$ (toate celelalte componente vor fi nule); aceasta înseamnă că planul YZ este de antioglindire. Deoarece, totuși, pentru tensorul (2.3) direcția axelor X și Y nu este fixată (axa Z este axă de simetrie ∞), oricare dintre planele ce trec prin axa Z va fi plan de antioglindire. Grupul de simetrie completă al vectorului axial va fi astfel scris cu ajutorul simbolurilor $\infty/mm\underline{m}$.

Vectorul polar, scris sub formă tensorială

$$\begin{bmatrix} 0 & -A_{12} & 0 \\ A_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \qquad (2.5)$$

are ca elemente de simetrie o axă ∞, care coincide cu axa sistemului de coordonate al tensorului și un număr infinit de plane de simetrie ce trec prin această axă (grupul de simetrie ∞mm). Rotațiile de 180° în jurul axei perpendiculare pe axa Z, interzise în cadrul simetriei obișnuite, corespund — după cum ne dăm seama ușor — antiaxelor 2 ale vectorului, iar reflexia într-un plan perpendicular pe axa Z, interzisă în simetria obișnuită, corespunde antiplanului $\underline{m}$.

Scanned with OKEN Scanner

Datorită simplităţii deducerii, nu vom demonstra cele spuse. Grupul de simetrie completă al vectorului polar poate fi astfel scris sub forma $\infty/\underline{m}mm$.

c) SIMETRIA COMPLETĂ A TENSORILOR POLARI ŞI AXIALI

Tensorii polari, cu aceeaşi simetrie obişnuită (grupul mmm),

$$\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & -a_{11} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ şi } \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{bmatrix} \tag{2.6}$$

au simetrie completă diferită. Grupul de simetrie completă al primului dintre tensorii (2.6) coincide cu grupul de simetrie obişnuită (acest tensor nu conţine ca elemente de simetrie complementară nici antirotaţii, nici rotaţii cu antioglindire) şi se va nota ca şi acela, mmm. Cel de-al doilea tensor are, pe lîngă acelaşi elemente de simetrie, şi elemente de simetrie complementară : o antiaxă de ordinul $\underline{4}$, care coincide cu axa Z a sistemului de coordonate. Această antiaxă este în acelaşi timp şi axă de antioglindire de ordinul patru $\overline{4}$. În afară de aceasta, tensorul are două antiaxe de ordinul doi $\underline{2}$, reciproc perpendiculare, situate în planul XY al sistemului de coordonate şi care fac unghiuri de 45° cu axele X şi Y, precum şi două antiplane ce trec prin axa Z şi axa $\underline{2}$.

Să demonstrăm că axa de simetrie 2, care coincide cu direcţia axei Z, va fi în acelaşi timp antiaxă $\underline{4}$ şi axă de antioglindire $\overline{4}$. Pentru verificarea existenţei antiaxei $\underline{4}$ vom determina componentele tensorului după rotirea sistemului său de coordonate în jurul axei Z cu 90°. Matricea cosinuşilor, corespunzătoare acestei transformări, va avea forma

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Pe baza formulelor de transformare ale componentelor tensorului se obţine $a'_{11} = -a_{11}$; $a'_{22} = a_{11}$ (restul $a'_{ik} = 0$) ; aceasta reprezintă chiar demonstraţia faptului că axa dată este antiaxă $\underline{4}$. Rotaţia cu oglindire de 90° în jurul axei Z corespunde matricei cosinuşilor

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

Scanned with OKEN Scanner

a cărei folosire conduce de asemenea la $a'_{11} = -a_{11}$; $a'_{22} = a_{11}$ (celelalte $a'_{ik} = 0$); aceasta corespunde faptului că axa dată este axă de antioglindire de ordinul patru $\underline{4}$. Găsirea antiaxelor $\underline{2}$ și antiplanului $\underline{m}$ nu va mai fi dată aici, din cauza simplității calculelor. Astfel, grupul de simetrie completă al celui de-al delea tensor (2.6) poate fi scris sub forma $\underline{4}/mmm$.

Existența acestui grup de simetrie permite ca tensorul polar să aibă și alte grupuri de simetrie completă, care au drept elemente de simetrie complementară antiaxe și axe de antioglindire. Astfel, combinația celui de-al doilea tensor (2.6) cu un vector axial dirijat după axa Z, conduce la grupul $\underline{m}\underline{m}\underline{m}$, iar combinația aceluiași tensor cu un vector axial, situat într-unul dintre antiplane (dar care nu coincide cu Z), duce la grupul $\underline{2}/\underline{m}$. Ansamblul tuturor grupurilor de simetrie completă ale tensorilor polari este dat în tabelul 12. Numărul unor astfel de grupuri este 10. Observăm că toate aceste grupuri conțin — ca elemente de simetrie — un centru de simetrie.

Dintre tensorii axiali ne oprim mai întîi la tensorul

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_{33} \end{bmatrix}, \tag{2.7}$$

care are grupul de simetrie $\infty 2$ (elipsoid de rotație fără plane de simetrie). Vom arăta că acest tensor are ca elemente de simetrie complementară un antiplan $\underline{m}$ perpendicular pe axa Z și o mulțime infinită de antiplane care trec prin axa Z. Reflectării în planul perpendicular pe axa Z îi corespunde matricea cosinușilor

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

După o asemenea transformare a sistemului de coordonate componentele tensorului (2.7), determinate cu ajutorul formulelor de transformare ale tensorului axial, vor fi egale cu $A'_{33} = -A_{33}$ (toate celelalte $A_{ik} = 0$). Aceasta sugerează că planul X_1X_2 al acestui tensor este antiplan $\underline{m}$. Analog se poate arăta că și oricare dintre planele ce trec prin axa Z este, de asemenea, un antiplan. Astfel, grupul de simetrie completă al acestui tensor poate fi notat $\infty/\underline{m}\underline{m}\underline{m}$. Grupul de simetrie

Scanned with OKEN Scanner

Tabelul 12

Forma canonică și simetria completă a tensorilor polari de ordinul doi

Mărimea	Forma canonică a tensorului	Grupurile de simetrie completă ale tensorilor	Poziția axelor
Scalar	$\begin{matrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{11} & 0 \\ 0 & 0 & a_{11} \end{matrix}$	$\infty/\infty/mmm$	Arbitrară
Tensor polar	$\begin{matrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{11} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{matrix}$	∞/mmm	Axa ∞ coincide cu axa Z
	$\begin{matrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{matrix}$	mmm	Axele 2 coincid cu axele X, Y, Z
	$\begin{matrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & -a_{11} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix}$	$\underline{4}/mm\underline{m}$	Axa $\underline{4}$ coincide cu axa Z; axele 2 coincid cu axele X, Y
Vector axial	$\begin{matrix} a_{11} & -a_{12} & 0 \\ a_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix}$	$\infty/\underline{m}\underline{m}\underline{m}$	Axa ∞ a vectorului axial coincide cu axa Z
Combinație de scalar cu vector axial	$\begin{matrix} 0 & -a_{12} & 0 \\ a_{12} & a_{11} & 0 \\ 0 & 0 & a_{11} \end{matrix}$	∞/m	Axa ∞ a vectorului axial coincide cu axa Z
Combinație de tensor polar și vector axial	$\begin{matrix} a_{11} & -a_{12} & 0 \\ a_{12} & a_{11} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{matrix}$	∞/m	Axele ∞ ale tensorului polar și vectorului axial coincid cu axa Z

Scanned with OKEN Scanner

Tabelul 12 (continuare)

1	2	3	4
	$\begin{matrix} a_{11} & -a_{12} & 0 \\ a_{12} & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{22} \end{matrix}$	$2/m\ \infty$	Axa ∞ a tensorului polar coincide cu axa X; axa ∞ a vectorului axial coincide cu axa Z
	$\begin{matrix} a_{11} & -a_{12} & 0 \\ a_{12} & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{matrix}$	$2/m$	Axele 2 ale tensorului polar coincid cu axele X, Y, Z; axa ∞ a vectorului axial coincide cu axa Z
	$\begin{matrix} a_{11} & -a_{12} & 0 \\ a_{12} & -a_{11} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix}$	$m\underline{m}\underline{m}$	Axa $\underline{4}$ a tensorului polar și axa ∞ a vectorului axial coincid cu axa Z
	$\begin{matrix} a_{11} & -a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & -a_{11} & -a_{13} \\ -a_{13} & a_{13} & 0 \end{matrix}$	$\underline{2}/\underline{m}$	Axa $\underline{4}$ a tensorului polar coincide cu axa Z; axa vectorului axale se află într-unul din antiplanel tensorului polar, dar nu coincide cu axa Z
	$\begin{matrix} a_{11} & -a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{11} & -a_{23} \\ -a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{matrix}$	$\bar{1}$	Axa ∞ a tensorului polar coincide cu axa Z; axa ∞ a vectorului axial nu coincide cu niciuna dintre axele X, Y, Z
	$\begin{matrix} a_{11} & -a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & -a_{23} \\ -a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{matrix}$	$\bar{1}$	Axele 2 ale tensorului polar coincid cu axele X, Y, Z; axa ∞ a vectorului axial nu coincide cu niciuna dintre aceste axe

Scanned with OKEN Scanner

Tabelul 13

Forma canonică şi simetria completă a tensorilor axiali de ordinul doi

Mărimea	Forma canonică a tensorului	Grupurile de simetrie completă ale tensorilor	Poziţia axelor
Pseudoscalar	$\begin{matrix} A_{11} & 0 & 0 \\ 0 & A_{11} & 0 \\ 0 & 0 & A_{11} \end{matrix}$	$\infty/\infty/\underline{m}\underline{m}\underline{m}$	Arbitrară
Tensor axial	$\begin{matrix} A_{11} & 0 & 0 \\ 0 & A_{11} & 0 \\ 0 & 0 & A_{33} \end{matrix}$	$\infty/\underline{m}\underline{m}\underline{m}$	Axa ∞ coincide cu axa Z
	$\begin{matrix} A_{11} & 0 & 0 \\ 0 & A_{22} & 0 \\ 0 & 0 & A_{33} \end{matrix}$	$\underline{m}\underline{m}\underline{m}$	Axele 2 coincid cu axele X, Y, Z
	$\begin{matrix} A_{11} & 0 & 0 \\ 0 & -A_{11} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix}$	$\underline{4}/\underline{m}\underline{m}\underline{m}$	Axa $\underline{4}$ coincide cu axa Z; axele 2 coincid cu axele X, Y
Vector polar	$\begin{matrix} 0 & -A_{12} & 0 \\ A_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix}$	$\infty/\underline{m}mm$	Axa ∞ coincide cu axa Z
Combinaţie de pseudoscalar cu vector polar	$\begin{matrix} A_{11} & -A_{12} & 0 \\ A_{12} & A_{11} & 0 \\ 0 & 0 & A_{11} \end{matrix}$	$\infty/\underline{m}$	Axa ∞ a vectorului polar coincide cu axa Z
Combinaţie de tensor axial cu vector polar	$\begin{matrix} A_{11} & -A_{12} & 0 \\ A_{12} & A_{11} & 0 \\ 0 & 0 & A_{33} \end{matrix}$	$\infty/\underline{m}$	Axele ∞ ale tensorului axial şi vectorului polar coincid cu axa Z

Scanned with OKEN Scanner

Tabelul 13 (continuare)

1	2	3	4
	$\begin{matrix} A_{11} & 0 & 0 \\ 0 & A_{11} & -A_{23} \\ 0 & A_{23} & A_{33} \end{matrix}$	$2/\underline{m}$	Axa ∞ a tensorului axial coincide cu axa Z; axa ∞ a vectorului polar coincide cu axa X
	$\begin{matrix} A_{11} & -A_{12} & 0 \\ A_{12} & A_{22} & 0 \\ 0 & 0 & A_{33} \end{matrix}$	$2/m$	Axele 2 ale tensorului coincid cu axele X, Y, Z; axa vectorului polar coincide cu axa Z
	$\begin{matrix} A_{11} & -A_{12} & 0 \\ A_{12} & -A_{11} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix}$	$\underline{m}mm$	Axa $\underline{4}$ a tensorului axial și axa ∞ a vectorului polar coincid cu axa Z
	$\begin{matrix} A_{11} & -A_{12} & A_{13} \\ A_{12} & -A_{11} & -A_{13} \\ -A_{13} & A_{13} & 0 \end{matrix}$	$\underline{2}/m$	Axa $\underline{4}$ a tensorului axial coincide cu axa Z; axa ∞ a vectorului polar se află într-unul din planele de simetrie ale tensorului axial
	$\begin{matrix} A_{11} & -A_{12} & A_{13} \\ A_{12} & A_{11} & -A_{23} \\ -A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{matrix}$	$\underline{\bar{1}}$	Axa ∞ a tensorului axial coincide cu axa Z; axa ∞ a vectorului polar este orientată arbitrar în raport cu axele X, Y, Z
	$\begin{matrix} A_{11} & -A_{12} & A_{13} \\ A_{12} & A_{22} & -A_{23} \\ -A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{matrix}$	$\underline{\bar{1}}$	Axele 2 ale tensorului axial coincid cu axele X, Y, Z; axa ∞ a vectorului polar este orientată arbitrar în raport cu aceste axe

Scanned with OKEN Scanner

completă al tensorului menționat coincide cu grupul de simetrie completă al tensorului

$$\begin{bmatrix} A_{11} & 0 & 0 \\ 0 & A_{11} & 0 \\ 0 & 0 & A_{33} \end{bmatrix}.$$

Un tensor axial de forma

$$\begin{bmatrix} A_{11} & 0 & 0 \\ 0 & -A_{11} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{2.8}$$

are grupul de simetrie $\bar{4}2m$. Acest tensor, din punct de vedere al simetriei complete, are o antiaxă $\underline{4}$ care coincide cu axa de oglindire $\bar{4}$, două antiaxe $\underline{2}$ care fac cu axele X și Y unghiuri de 45°, trei antiplane care coincid cu planele XY, XZ și YZ și anticentru de simetrie.

Ca exemplu să verificăm faptul că acest tensor are, într-adevăr, o antiaxă $\underline{4}$. Matricea cosinușilor, corespunzătoare rotației sistemului de coordonate cu 90° în jurul axei X_3, are forma

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Componentele tensorului se transformă prin această rotație în următorul mod: $A'_{11} = -A_{11}$; $A'_{22} = A_{11}$ (toate celelalte $A'_{ik} = 0$), cu alte cuvinte axa considerată este antiaxă $\underline{4}$.

Combinația tensorului (2.8) cu un vector polar conduce la grupurile de simetrie completă $\underline{m}mm$ și $\underline{2}/m$. Ansamblul tuturor grupurilor de simetrie completă ale tensorilor axiali este dat în tabelul 13. Numărul total de grupuri de simetrie completă ale tensorilor axiali este egal cu 10. Toate grupurile de simetrie completă ale acestor tensori conțin un anticentru de simetrie $\underline{\bar{2}}$ *.

În fig. 33 este dată reprezentarea grafică a cîtorva mărimi descrise de tensori polari și axiali de ordinul doi și de combinații ale acestora. Mărimile figurate aici reprezintă simetria celor 10 grupuri limită ale *direcțiilor* (din cele 11 grupuri, nu este

---

* Grupul de simetrie completă al unui tensor, care are drept operație de simetrie numai anticentru, se notează (cf. notei de la p. 84) cu $\underline{\bar{1}}$ (vezi tabelele 13, 14, 15).

Scanned with OKEN Scanner

reprezentat grupul ∞ ; vezi, de asemenea, mai departe). Trebuie să atragem atenţia că una şi aceeaşi dintre reprezentările geometrice poate avea grup de simetrie diferit în cadrul simetriei obişnuite şi al celei complete. Aceasta este de înţeles, deoarece pentru unele figuri (şi reprezentări geometrice) sînt posibile elemente *complementare* de simetrie în cadrul simetriei

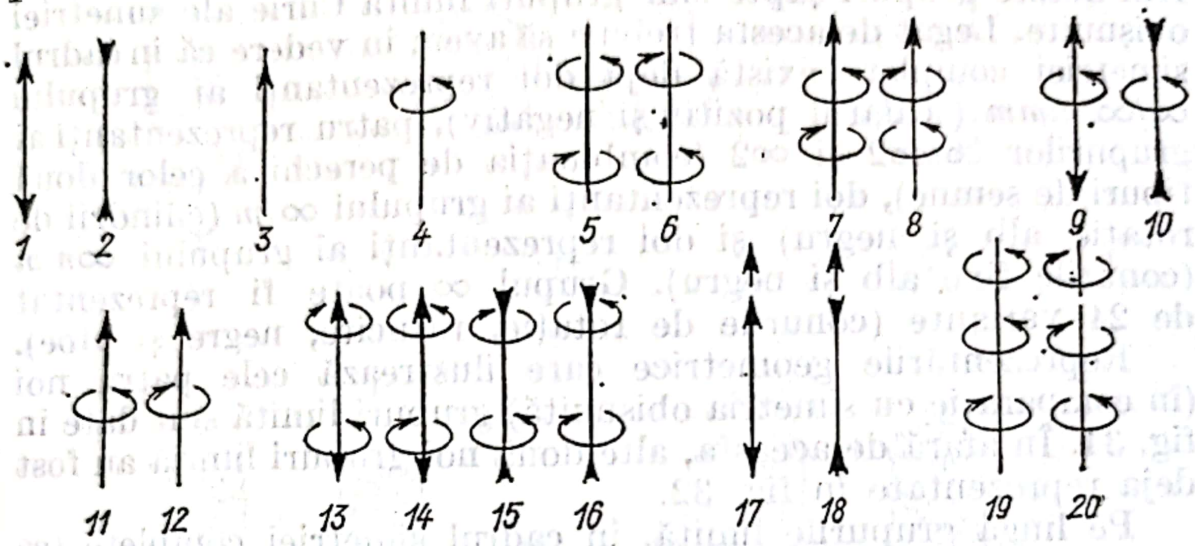


Fig. 33. Reprezentarea grafică a unor mărimi descrise de tensori de ordinul doi şi de combinaţii ale acestora :

1,2 — tensori polari de ordinul doi pozitiv şi negativ (grupul ∞/mmm) ; *3* — vector polar (grupul $\infty/\underline{mmm}$) ; *4* — vector axial (grupul $\infty/mm\underline{m}$) ; *5,6* — tensor axial de ordinul doi (stîng şi drept, grupul $\infty/\underline{mmm}$) ; *7,8* — combinaţii ale unui tensor axial cu un vector polar (grupul $\infty/\underline{m}$) ; *9, 10* — combinaţii ale unui tensor polar cu un vector axial (grupul ∞/m) ; *11, 12* — combinaţii de vectori polar şi axial (grupul $\infty\,\underline{2}$) ; *13—16* — combinaţii de tensori polar şi axial (grupul $\infty\,\underline{2}$) ; *17,18* — combinaţii ale unui tensor polar cu un vector polar (grupul ∞mm) ; *19,20* — combinaţii ale unui tensor axial cu un vector axial (grupul $\infty/\underline{mm}$).

complete. De exemplu, vectorul polar (vezi fig. 23, a) are simetria obişnuită descrisă de grupul ∞mm. În simetria completă (*3* din fig. 33) acelaşi vector este descris de grupul $\infty/\underline{mmm}$. Grupul ∞mm din simetria completă este reprezentat de combinaţiile *17* şi 18 din fig. 33. Combinaţiile menţionate au acelaşi grup şi în cadrul simetriei obişnuite. Aşadar, reprezentările geometrice *3* şi *17 — 18* din fig. 33 nu diferă în cadrul simetriei obişnuite, dar în cea completă sînt deosebite.

2.3. GRUPURILE LIMITĂ ŞI GRUPURILE CRISTALOGRAFICE ÎN SIMETRIA COMPLETĂ

a) GRUPURILE LIMITĂ

În tabelele 12 şi 13 s-au dat cele patru grupuri limită de simetrie completă ale tensorului polar : $\infty/\infty/mmm$, ∞/mmm, $\infty/mm\underline{m}$, ∞/m şi cele patru grupuri de simetrie ale tensorului

axial : $\infty/\infty/\underline{m}\underline{m}\underline{m}$, $\infty/\underline{m}\underline{m}\underline{m}$, $\infty/\underline{m}\underline{m}\underline{m}$, $\infty/\underline{m}$. Folosirea principiului simetriei Curie, cu condiţia ca axa ∞ a figurilor (tensorilor) ce se suprapun (coincidente) să coincidă, duce la încă şase noi grupuri limită : $\infty/\infty 2$, ∞mm, $\infty\underline{m}\underline{m}$, $\infty 2$, $\infty\underline{2}$, ∞. Astfel, numărul grupurilor limită din simetria completă a scalarilor, vectorilor şi tensorilor de ordinul doi este egal cu 14. Din aceste grupuri şapte sînt grupuri limită Curie ale simetriei obişnuite. Legat de acesta trebuie să avem în vedere că în cadrul simetriei complete există deja doi reprezentanţi ai grupului $\infty/\infty/mmm$ (scalarul pozitiv şi negativ), patru reprezentanţi ai grupurilor $\infty/\infty 2$ şi $\infty 2$ (combinaţia de perechi a celor două tipuri de semne), doi reprezentanţi ai grupului ∞/m (cilindrii de rotaţie alb şi negru) şi doi reprezentanţi ai grupului ∞mm (conurile fixe alb şi negru). Grupul ∞ poate fi reprezentat de 24 variante (conurile de rotaţie, răsucite, negre şi albe).

Reprezentările geometrice care ilustrează cele patru noi (în comparaţie cu simetria obişnuită) grupuri limită sînt date în fig. 34. În afară de aceasta, alte două noi grupuri limită au fost deja reprezentate în fig. 32.

Pe lîngă grupurile limită, în cadrul simetriei complete (ca şi al celei obişnuite) trebuie să considerăm şi grupurile *aproape limită*. Grupurile aproape limită nu sînt grupuri limită în sensul deplin al cuvîntului. În ultimă instanţă, seriile de grupuri care aparţin de grupurile aproape limită converg spre grupuri cu adevărat limită, dar caracterul acestei aproximaţii este diferit de caracterul aproximaţiei seriilor care converg spre grupuri limită adevărate (vezi § 1.2).

Evident, cele cinci grupuri aproape limită din simetria obişnuită reprezentate în fig. 8 vor fi şi grupuri aproape limită din simetria completă *. Acestea sînt grupurile : $\overline{\infty}mm$, $\overline{\infty}$, $\infty/\infty mm$, $\infty/\infty/m$, ∞/∞. Prin analogie cu primele două dintre ele urmează (folosind grupurile limită $\infty/\underline{m}\underline{m}\underline{m}$, $\infty/\underline{m}\underline{m}\underline{m}$, $\infty/\underline{m}\underline{m}\underline{m}$, $\infty/\underline{m}$) să introducem grupurile aproape limită $\overline{\infty}\underline{m}\underline{m}$, $\overline{\infty}\underline{m}\underline{m}$. Mai departe, mărind ordinul axei în grupurile de simetrie $\underline{4}/\underline{m}\underline{m}\underline{m}$, $\underline{\overline{2}}/\underline{m}$ ale tensorului polar, ajungem la grupurile $\underline{\infty}/\underline{m}\underline{m}\underline{m}$, $\underline{\infty}/\underline{m}$. Analog, plecînd de la grupurile $\underline{4}/\underline{m}\underline{m}\underline{m}$, $2/m$ ale tensorului axial ajungem la grupurile $\underline{\infty}/\underline{m}\underline{m}\underline{m}$, $\underline{\infty}/\underline{m}$. Succesiunea de grupuri de forma $\underline{2}2\underline{2}$, $\underline{4}2\underline{2}$, $\underline{6}2\underline{2}$,... dă grupul $\underline{\infty}2$. Combinaţia grupurilor $\underline{\infty}/\underline{m}\underline{m}\underline{m}$ şi $\infty/\underline{m}\underline{m}\underline{m}$ conduce la grupul $\infty\underline{m}\underline{m}$, iar combinaţia grupurilor $\underline{\infty}/m$ şi $\underline{\infty}/\underline{m}$ la grupul $\underline{\infty}$.

---

* Grupul de simetrie obişnuită se tratează ca descriind simetria figurilor monocolore şi intră în numărul total de grupuri de simetrie completă.

Scanned with OKEN Scanner

Dintre cele 14 grupuri limită de simetrie ale tensorilor de ordinul doi, 11 descriu simetria *direcţiilor* (vezi fig. 33). Astfel grupul $\infty/\underline{m}mm$ descrie simetria unei direcţii polare, grupul $\infty/m\underline{m}\underline{m}$ — a uneia axiale ş.a.m.d. Celor 11 grupuri le

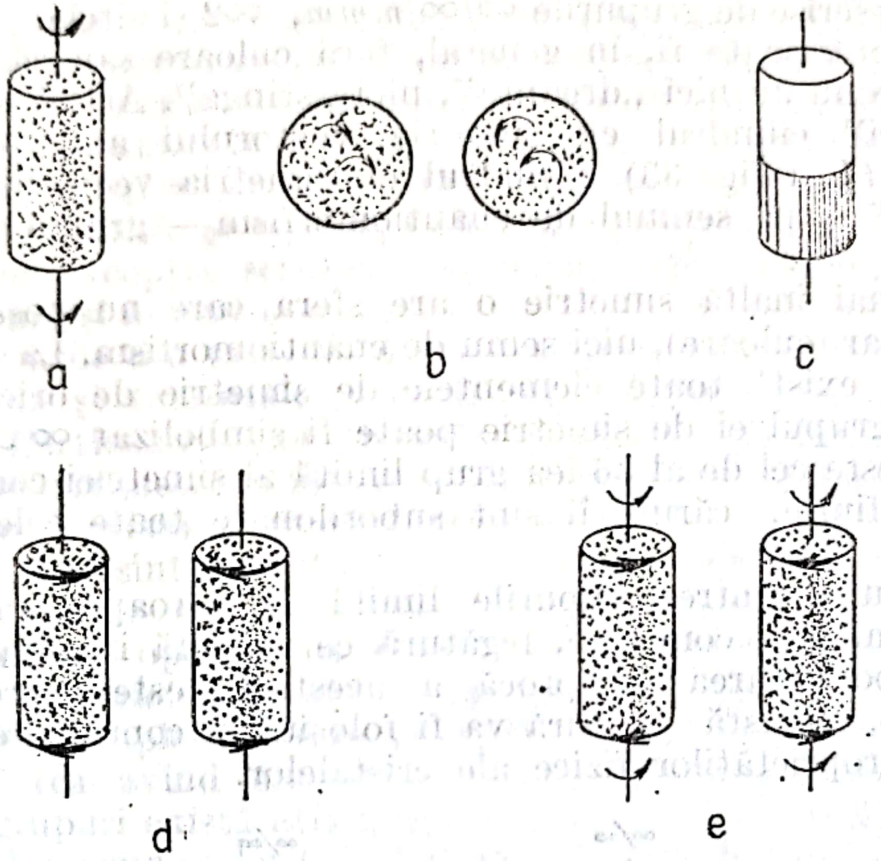


Fig. 34. Figuri reprezentînd cîteva dintre grupurile limită ale simetriei complete:

a — cilindrul gri de rotaţie (grupul ∞/mmm, vector axial); b — sfere (dreaptă şi stîngă) gri, fără plane de simetrie (grupul $\infty/\infty/mmm$); c — cilindru fix, conţinînd o parte neagră şi o parte albă (grupul $\infty/\underline{m}mm$, vector polar); d — cilindrii gri răsuciţi (grupul $\infty/\underline{mmm}$); e — cilindrii gri răsuciţi, de rotaţie (grupul $\infty/\underline{mm}$).

corespund 11 grupuri *sferice*, dintre care trei sînt limită ($\infty/\infty/mmm$, $\infty/\infty/\underline{m}\underline{m}\underline{m}$, $\infty/\infty 2$), trei sînt grupurile aproape limită menţionate $\infty/\infty mm$, $\infty/\infty/m$, ∞/∞) iar cinci — grupuri noi ($\infty/\infty/m\underline{m}\underline{m}$, $\infty/\infty/\underline{m}mm$, $\infty/\infty\underline{2}$, $\infty/\infty/\underline{m}$, $\infty/\infty\underline{m}\underline{m}$). Numărul total de grupuri limită din cadrul simetriei complete a figurilor finite este egal cu 35 (14 + 21)*.

* În cadrul simetriei obişnuite se ştie că grupurile limită şi aproape limită sînt completate de acelea care decurg din considerarea simetriei tensorilor polari şi axiali de ordinul doi. Posibilitatea extinderii, prin analogie, a acestei situaţii la simetria completă este destul de evidentă, dar în mod riguros necesită un studiu special.

Printre aceste grupuri există și grupurile de simetrie completă ale figurilor monocolore. Acestea sînt grupurile limită ale simetriei Curie. Unele grupuri descriu simetria figurilor ale căror părți au toate doar un singur semn de enantiomorfism (adică sînt fie drepte, fie stîngi). Astfel sînt, de exemplu, figurile descrise de grupurile $\infty/\infty/\underline{m}\underline{m}\underline{m}$, $\infty 2$ și altele.

O figură poate fi, în general, fără culoare sau să conțină părți care nu au nici „dreapta", nici „stînga". Astfel, se consideră „gri" cilindrul cu simetria vectorului axial — grupul $\infty/m\underline{m}\underline{m}$ (*4* în fig. 33). Cilindrul cu simetria vectorului polar este „gri" după semnul de enantiomorfism — grupul $\infty/\underline{m}mm$ (*3* în fig. 33).

Cea mai înaltă simetrie o are sfera care nu posedă nici semn scalar (culoare), nici semn de enantiomorfism. La o asemenea sferă există toate elementele de simetrie de orice ordin. Formal, grupul ei de simetrie poate fi simbolizat $\infty/\overline{\infty}/\underline{\infty}/\overline{\infty}$. Aceasta este cel de-al 36-lea grup limită al simetriei complete a figurilor finite. căruia îi sînt subordonate toate celelalte 35 grupuri.

Legătura dintre grupurile limită și aproape limită din cadrul simetriei complete, legătură ce reflectă într-un anumit grad subordonarea reciprocă a acestora, este reprezentată în fig. 35. Această legătură va fi folosită în continuare pentru studiul proprietăților fizice ale cristalelor.

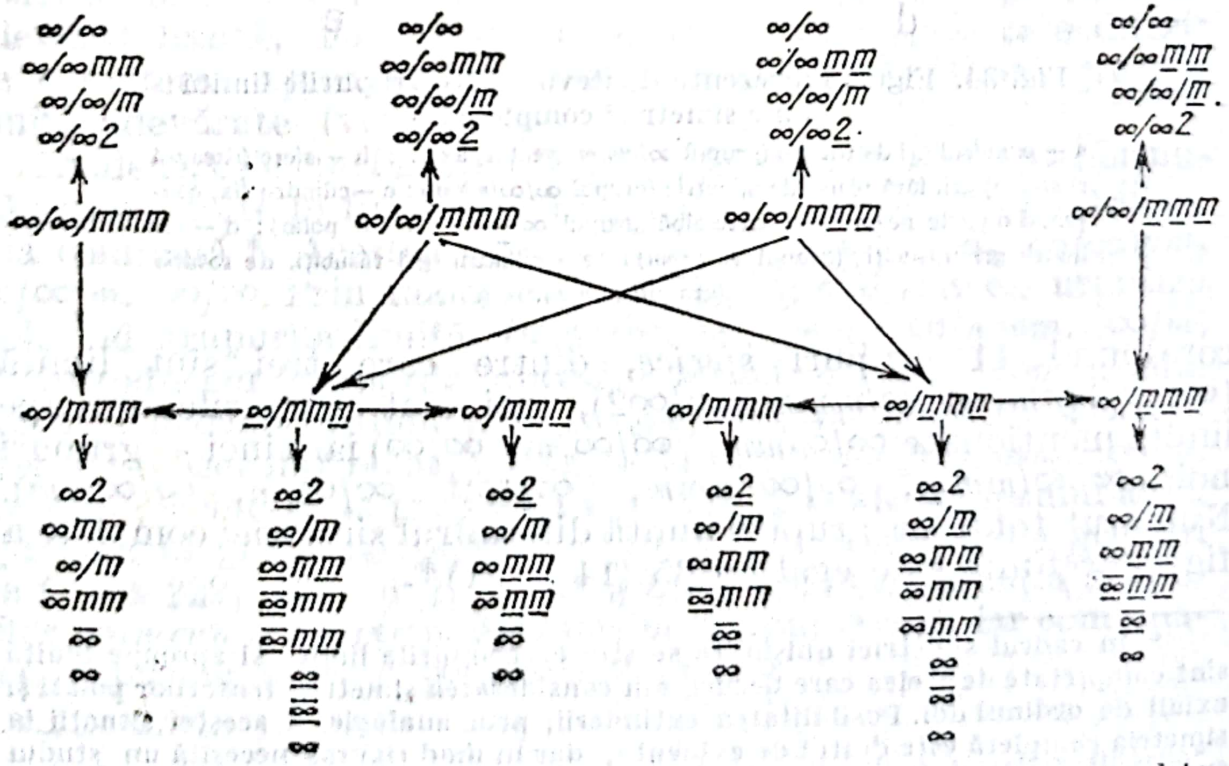


Fig. 35. Legătura dintre grupurile limită și aproape limită ale simetriei complete.

Scanned with OKEN Scanner

Cunoscînd grupurile limită şi aproape limită nu este greu de întocmit un tabel de grupuri ale simetriei complete, analog cu tabelul 2. Totuşi, aici ne vom limita doar la grupurile cristalografice din cadrul simetriei complete (tabelul 14). În simetria completă a unei figuri (prin analogie cu cea obişnuită), grupurile cristalografice ce o descriu pot avea axe de rotaţie, de rotaţie cu oglindire, de antirotaţie şi de rotaţie cu antioglindire, de ordinele 1, 2, 3, 4 şi 6. În tabelul 14 grupurile sînt clasificate după grupurile limită şi aproape limită corespunzătoare. Fiecare serie (cu excepţia seriilor grupurilor cubice) este separată în două (pară şi impară).

Grupurile din tabelul 14 descriu simetria mărimilor scalare, vectoriale şi tensoriale, precum şi a figurilor de dimensiuni finite. Particularităţile tratării simetriei figurilor în cadrul simetriei complete au fost analizate detailat în § 1.1.

În total există 90 grupuri cristalografice de simetrie completă. În tabelul 15 sînt indicate toate operaţiile de simetrie completă *. Printre aceste grupuri există 32 care conţin ca operaţii de grup aceleaşi operaţii ca şi cele 32 grupuri cristalografice din cadrul simetriei obişnuite (vezi tabelele 4 şi 15). În cadrul simetriei complete aceste grupuri trebuie privite ca „monocolore" (ca avînd un semn scalar determinat). Între restul de 58 grupuri există atît grupuri „bicolore", cît şi grupuri care n-au deloc semn scalar („fără culoare", „gri" în raport cu semnul scalar). Fiecare dintre aceste 58 grupuri conţine, ca subgrupuri, grupuri de simetrie obişnuită. Cel mai înalt dintre ele are ordinul de două ori mai coborît decît ordinul grupului considerat în simetria completă. Astfel, de exemplu, grupul $\underline{4}/mm\underline{m}$ are ordinul 16 şi conţine ca subgrup grupul cel mai înalt din simetria obişnuită, de ordinul 8 ($16 : 8 = 2$). Analog, grupul $\underline{6}/\underline{m}$ are subgrupul $\bar{3}$ ($12 : 6 = 2$) ş.a.m.d.

Oricare dintre cele 90 grupuri de simetrie completă este izomorf cu unul dintre cele 18 grupuri diferite de simetrie punctuală obişnuită (date în § 1.3). Astfel, din tabelul 15 rezultă imediat că grupul $\underline{\bar{3}}m$ este izomorf cu $\bar{3}m$; grupurile $\underline{mm}2$ şi $mm\underline{2}$ — cu grupul $mm2$; grupurile $\underline{m}3m$, $m3\underline{m}$ şi $\underline{m}3\underline{m}$ — cu grupul $m3m$ ş.a.m.d. Ne putem convinge de acesta comparînd clasele de elemente conjugate ale grupurilor de simetrie completă

* În cazurile cînd operaţiile identice aparţin la diferite clase conjugate, în completare la notaţiile lor se introduc accente simple sau duble, de exemplu, 2 2′ 2′ 2″ 2″, m m' m' m'' m''.

Tabelul 14

Sistematica grupurilor cristalografice din cadrul simetriei complete

$m3m$ $\infty/\infty/mmm$	$m3m$ $\infty/\infty/mmm$	$m3m$ $\infty/\infty/mmm$	$m3m$ $\infty/\infty/mmm$	432 $\infty/\infty 2$	$\bar{4}32$ $\infty/\infty 2$	$m3$ $\infty/\infty/m$	$m\bar{3}$ $\infty/\infty/m$	$\bar{4}3m$ $\infty/\infty mm$	$\bar{4}3m$ $\infty/\infty mm$	23 ∞/∞
mmm $6/mmm$ | $4/mmm$ ∞/mmm		mmm $6/mmm$ | $4/mmm$ ∞/mmm		$mm2$ $\bar{6}m2$ | mmm $4/mmm$ $6/mmm$ ∞/mmm		$mm2$ $\bar{6}m2$ | mmm $4/mmm$ $6/mmm$ ∞/mmm		$mm2$ $\bar{6}m2$ | mmm $4/mmm$ $6/mmm$ ∞/mmm		$mm2$ $\bar{6}m2$ | mmm $4/mmm$ $6/mmm$ ∞/mmm
2 32 | 222 422 622 $\infty 2$		2 32 | 222 422 622 $\infty 2$		m $\bar{6}$ | $2/m$ $4/m$ $6/m$ ∞/m		$2/m$ $\bar{6}$ | $2/m$ $4/m$ $6/m$ ∞/m		$2/m$ $6/m$ | $4/m$ ∞/m		$2/m$ $6/m$ | $4/m$ ∞/m
m $3m$ | $mm2$ $4mm$ $6mm$ ∞mm		m $3m$ | $mm2$ $4mm$ $6mm$ ∞mm		$mm2$ $6mm$ | $4mm$ ∞mm		$2/m$ $\bar{3}m$ | $\bar{4}2m$ ∞mm		$2/m$ $\bar{3}m$ | $\bar{4}2m$ ∞mm		$2/m$ $\bar{3}m$ | $\bar{4}2m$ ∞mm
$2/m$ $\bar{3}m$ | $\bar{4}2m$ ∞mm		222 622 | 422 $\infty 2$		$\bar{1}$ 3 | $\bar{4}$ ∞		$\bar{1}$ $\bar{3}$ | $\bar{4}$ ∞		2 6 | 4 ∞		1 3 | 2 4 6 ∞

Scanned with OKEN Scanner

Grupurile cristalografice din cadrul simetriei complete

Nr. crt.	Sistemul	Simbolul grupului	Operația de simetrie completă *
1	Triclinic	1	1
2		$\bar{1}$	$1c$
3		$\bar{1}$	$1\bar{c}$
4	Monoclinic	2	12
5		2	12
6		m	$1m$
7		m	$1m$
8		$2/m$	$12mc$
9		$2/m$	$12mc$
10		$2/m$	$12mc$
11		$2/m$	$12mc$
12	Rombic	222	$1222'$
13		222	$122'2''$
14		$mm2$	$12mm'$
15		$mm2$	$12mm$
16		$mm2$	$12mm'$
17		mmm	$1222'mmm'c$
18		mmm	$122'2''mm'm''c$
19		mmm	$1222'mm'mc$
20		mmm	$122'2''mm'm''c$
21	Tetragonal	4	1424^{-1}
22		4	1424^{-1}
23		422	$1244^{-1}2'2'22$
24		422	$1244^{-1}222'2'$
25		422	$1244^{-1}2'2'2''2''$
26		$4/m$	$1424^{-1}m\bar{4}\bar{4}^{-1}c$
27		$4/m$	$1424^{-1}m\bar{4}\bar{4}^{-1}c$
28		$4/m$	$1424^{-1}m\bar{4}\bar{4}^{-1}c$
29		$4/m$	$1424^{-1}m\bar{4}\bar{4}^{-1}c$
30		$4mm$	$1244^{-1}mmmm$
31		$4mm$	$1244^{-1}mmm'm'$
32		$4mm$	$1244^{-1}mmm'm'$
33		$4/mmm$	$144^{-1}\bar{4}\bar{4}^{-1}c22'2'22mm'm'mm$
34		$4/mmm$	$144^{-1}\bar{4}\bar{4}^{-1}c22'2'2''2''mm'm'm''m''$

Scanned with OKEN Scanner

Nr. crt.	*Sistemul*	*Simbolul grupului*	*Operațiile de simetrie completă**
35	*Tetragonal*	$4/mmm$	$1 4 4^{-1} \bar{4}^{-1} c 2 2 2 2' 2' m m m m' m'$
36		$4/mmm$	$1 4 4^{-1} \bar{4}^{-1} c 2 2 2 2' 2' m m m m' m'$
37		$4/mmm$	$1 4 4^{-1} \bar{4}^{-1} c 2 2' 2' 2 2 m m m m' m'$
38		$4/mmm$	$1 4 4^{-1} \bar{4}^{-1} c 2 2' 2' 2'' 2'' m m' m' m'' m''$
39		$\bar{4}$	$1 \bar{4} \bar{4}^{-1} 2$
40		$\bar{4}$	$1 \bar{4} \bar{4}^{-1} 2$
41		$\bar{4}2m$	$1 2 \bar{4} \bar{4}^{-1} 2 2 m m$
42		$\bar{4}2m$	$1 2 \bar{4} \bar{4}^{-1} 2 2 m m$
43		$\bar{4}2m$	$1 2 \bar{4} \bar{4}^{-1} 2 2 m m$
44		$\bar{4}2m$	$1 2 \bar{4} \bar{4}^{-1} 2 2 m m$
45	*Rombaedric*	3	$1 3 3^{-1}$
46		32	$1 3 3^{-1} 2 2 2$
47		32	$1 3 3^{-1} 2 2 2$
48		$3m$	$1 3 3^{-1} m m m$
49		$3m$	$1 3 3^{-1} m m m$
50		$\bar{3}$	$1 3 3^{-1} c \bar{6} \bar{6}^{-1}$
51		$\bar{3}$ (C_{3i})	$1 3 3^{-1} c \bar{6} \bar{6}^{-1}$
52		$\bar{3}m$	$1 3 3^{-1} m m m 2 2 2 c \bar{6} \bar{6}^{-1}$
53		$\bar{3}m$	$1 3 3^{-1} m m m 2 2 2 c \bar{6} \bar{6}^{-1}$
54		$\bar{3}m$	$1 3 3^{-1} m m m 2 2 2 c \bar{6} \bar{6}^{-1}$
55		$\bar{3}m$	$1 3 3^{-1} m m m 2 2 2 c \bar{6} \bar{6}^{-1}$
56	*Hexagonal*	$\bar{6}$	$1 3 3^{-1} m \bar{3} \bar{3}^{-1}$
57		$\bar{6}$ (C_{3h})	$1 3 3^{-1} m \bar{3} \bar{3}^{-1}$
58		$\bar{6}m2$	$1 3 3^{-1} 2 2 2 m \bar{3} \bar{3}^{-1} m' m' m'$
59		$\bar{6}m2$	$1 3 3^{-1} 2 2 2 m \bar{3} \bar{3}^{-1} m m m$
60		$\bar{6}m2$	$1 3 3^{-1} 2 2 2 m \bar{3} \bar{3}^{-1} m m m$
61		$\bar{6}m2$	$1 3 3^{-1} 2 2 2 m \bar{3} \bar{3}^{-1} m m m$
62		6	$1 6 6^{-1} 3 3^{-1} 2$
63		6	$1 6 6^{-1} 3 3^{-1} 2$
64		622	$1 6 6^{-1} 3 3^{-1} 2 2' 2' 2' 2 2 2$
65		622	$1 6 6^{-1} 3 3^{-1} 2 2 2 2 2' 2' 2'$
66		622	$1 6 6^{-1} 3 3^{-1} 2 2' 2' 2' 2'' 2'' 2''$

Scanned with OKEN Scanner

Tabelul 15 (continuare)

Nr. crt.	Sistemul	Simbolul grupului	Operațiile de simetrie completă*
67	Hexagonal	$\underline{6}/\underline{m}$	$1\underline{6}\underline{6}^{-1}\underline{3}\underline{\bar{3}}^{-1}\underline{2}\underline{c}\underline{\bar{3}}\underline{\bar{3}}^{-1}\underline{\bar{6}}\underline{\bar{6}}^{-1}\underline{m}$
68		$\underline{6}/m$	$1\underline{6}\underline{6}^{-1}3\underline{3}^{-1}\underline{2}\underline{c}\underline{\bar{3}}\underline{\bar{3}}^{-1}\underline{\bar{6}}\underline{\bar{6}}^{-1}m$
69		$6/\underline{m}$	$1\underline{6}\underline{6}^{-1}3\underline{3}^{-1}\underline{2}\underline{c}3\underline{3}^{-1}\underline{\bar{6}}\underline{\bar{6}}^{-1}\underline{m}$
70		$6/m$	$1\underline{6}\underline{6}^{-1}3\underline{3}^{-1}\underline{2}\underline{c}\underline{\bar{3}}\underline{\bar{3}}^{-1}\underline{\bar{6}}\underline{\bar{6}}^{-1}m$
71		$\underline{6}\underline{m}\underline{m}$	$1\underline{6}\underline{6}^{-1}3\underline{3}^{-1}\underline{2}\underline{m}\underline{m}\underline{m}\underline{m}\underline{m}\underline{m}$
72		$\underline{6}m\underline{m}$	$1\underline{6}\underline{6}^{-1}3\underline{3}^{-1}\underline{2}\underline{m}\underline{m}\underline{m}\underline{m}'\underline{m}'\underline{m}'$
73		$6\underline{m}\underline{m}$	$1\underline{6}\underline{6}^{-1}3\underline{3}^{-1}2\underline{m}\underline{m}\underline{m}\underline{m}'\underline{m}'\underline{m}'$
74		$\underline{6}/\underline{m}\underline{m}\underline{m}$	$1\underline{6}\underline{6}^{-1}3\underline{3}^{-1}\underline{2}2'\underline{2}'\underline{2}'222\underline{c}\underline{\bar{3}}\underline{\bar{3}}^{-1}\underline{\bar{6}}\underline{\bar{6}}^{-1}\underline{m}\underline{m}\underline{m}\underline{m}\underline{m}'\underline{m}'\underline{m}'$
75		$\underline{6}/m\underline{m}\underline{m}$	$1\underline{6}\underline{6}^{-1}3\underline{3}^{-1}\underline{2}2'\underline{2}'\underline{2}'222\underline{c}\underline{\bar{3}}\underline{\bar{3}}^{-1}\underline{\bar{6}}\underline{\bar{6}}^{-1}mm'm'm'\underline{m}\underline{m}\underline{m}$
76		$\underline{6}/\underline{m}\underline{m}\underline{m}$	$1\underline{6}\underline{6}^{-1}3\underline{3}^{-1}\underline{2}2'\underline{2}'\underline{2}'\underline{2}''\underline{2}''\underline{2}''\underline{c}\underline{\bar{3}}\underline{\bar{3}}^{-1}\underline{\bar{6}}\underline{\bar{6}}^{-1}\underline{m}\underline{m}'\underline{m}'\underline{m}'$ $\underline{m}''\underline{m}''\underline{m}''$
77		$6/\underline{m}\underline{m}\underline{m}$	$16^{-1}633^{-1}\underline{2}\underline{2}\underline{2}\underline{2}\underline{2}'\underline{2}'\underline{2}'\underline{c}\underline{\bar{3}}\underline{\bar{3}}^{-1}\underline{\bar{6}}\underline{\bar{6}}^{-1}\underline{m}\underline{m}\underline{m}\underline{m}\underline{m}'\underline{m}'\underline{m}'$
78		$6/\underline{m}m\underline{m}$	$1\underline{6}\underline{6}^{-1}3\underline{3}^{-1}\underline{2}\underline{2}\underline{2}\underline{2}\underline{2}'\underline{2}'\underline{2}'\underline{c}\underline{\bar{3}}\underline{\bar{3}}^{-1}\underline{\bar{6}}\underline{\bar{6}}^{-1}\underline{m}m\underline{m}m\underline{m}'m'\underline{m}'$
79		$6/mmm$	$1\underline{6}\underline{6}^{-1}3\underline{3}^{-1}\underline{2}2'\underline{2}'\underline{2}'\underline{2}''\underline{2}''\underline{2}''\underline{c}\underline{\bar{3}}\underline{\bar{3}}^{-1}\underline{\bar{6}}\underline{\bar{6}}^{-1}mm'm'm'$ $m''m''m''$
80	Cubic	23	$1, (4)3, (4)3^{-1}, (3)2$
81		$\underline{\bar{4}}\underline{3}\underline{m}$	$1, (4)3, (4)3^{-1}, (3)2, (6)\underline{m}, (3)\underline{\bar{4}}, (3)\underline{\bar{4}}^{-1}$
82		$\underline{\bar{4}}3m$	$1, (4)3, (4)3^{-1}, (3)2, (6)m, (3)\underline{\bar{4}}, (3)\underline{\bar{4}}^{-1}$
83		$\underline{m}3$	$1, (4)3, (4)3^{-1}, (3)2, \underline{c}, (4)\underline{\bar{6}}, (4)\underline{\bar{6}}^{-1}, (3)\underline{m}$
84		m	$1, (4)3, (4)3^{-1}, (3)2, c, (4)\bar{6}, (4)\bar{6}^{-1}, (3)m$
85		$\underline{4}\underline{3}\underline{2}$	$1, (4)3, (4)3^{-1}, (3)2, (6)\underline{2}, (3)\underline{4}, (3)\underline{4}^{-1}$
86		$\underline{\bar{4}}\underline{3}\underline{2}$	$1, (4)3, (4)3^{-1}, (3)2, (6)2', (3)4, (3)4^{-1}$
87		$\underline{m}3\underline{m}$	$1, (4)3, (4)3^{-1}, (3)2, (6)\underline{2}, (3)\underline{4}, (3)\underline{4}^{-1}, \underline{c},$ $(4)\underline{\bar{6}}, (4)\underline{\bar{6}}^{-1}, (3)\underline{m}, (6)m, (3)\underline{\bar{4}}, (3)\underline{\bar{4}}^{-1}$
88		$m3\underline{m}$	$1, (4)3, (4)3^{-1}, (3)2, (6)\underline{2}, (3)\underline{4}, (3)\underline{4}^{-1}, c,$ $(4)\bar{6}, (4)\bar{6}^{-1}, (3)m, (6)\underline{m}, (3)\underline{\bar{4}}, (3)\underline{\bar{4}}^{-1}$
89		$\underline{m}3\underline{m}$	$1, (4)3, (4)3^{-1}, (3)2, (6)2', (3)4, (3)4^{-1},$ $\underline{c}, (4)\underline{\bar{6}}, (4)\underline{\bar{6}}^{-1}, (3)\underline{m}, (6)\underline{m}', (3)\underline{\bar{4}}, (3)\underline{\bar{4}}^{-1}$
90		$m3m$	$1, (4)3, (4)3^{-1}, (3)2, (6)2', (3)4, (3)4^{-1},$ $c, (4)\bar{6}, (4)\bar{6}^{-1}, (3)m, (6)m', (3)\bar{4}, (3)\bar{4}^{-1}$

*Pentru diferențierea operațiilor identice aparținînd unor clase conjugate diferite s-au folosit un, accent și două (de exemplu, $22'$, $mm'm''$ etc.).

Scanned with OKEN Scanner

cu clasele de elemente conjugate ale grupurilor de simetrie obișnuită (vezi tabelul 4).

În fig. 33 au fost interpretate cîteva grupuri limită din cadrul simetriei complete cu ajutorul vectorilor și tensorilor. Întrucît printre grupurile de simetrie completă ale tensorilor există și grupuri cristalografice, și acestea pot fi reprezentate sub forma unui ansamblu de mărimi descrise de tensori de ordinul doi (scalari, vectori, tensori propriu-ziși). Mai mult, se poate „construi" fiecare dintre grupurile cristalografice în simetria completă sub forma unui ansamblu de tensori de ordinul doi. Unele dintre reprezentările grupurilor sînt date în fig. 36. Trebuie să atragem atenția încă odată că printre grupurile de simetrie ale tensorilor de ordinul doi nu există grupuri care să corespundă figurilor cu axe de ordinul trei și mai înalt. Asemenea grupuri pot fi, totuși, reprezentate cu ajutorul tensorilor, considerînd nu numai mărimi tensoriale ci și paralelipipedele elementare ale cristalelor (sau secțiuni ale lor) (vezi fig. 36, b, c).

Particularitatea, deja menționată, a grupurilor limită și aproape limită, se concretizează în cazul cristalelor cubice prin diametre de simetrie diferită, care reflectă simetria direcțiilor (vezi fig. 33). Grupurile cubice de simetrie completă s-au dat în tabelul 14 tocmai ținînd seama de aceasta. Faptul permite ca aceste grupuri să fie interpretate geometric destul de eficace (fig. 37). Astfel de grupuri sînt în total 11. Unul dintre ele, și anume 23, care are cea mai joasă simetrie, poate fi reprezentat prin cinci combinații diferite (patru combinații de cîte trei mărimi de tipul: scalar — vector — pseudovector *, pseudoscalar — vector — pseudovector ș.a.m.d. și una care include toate mărimile: scalar, pseudoscalar, vector și pseudovector). Restul de grupuri cubice din cadrul simetriei complete (cu excepția grupului 23) au numai o singură interpretare.

În cazul scalarilor și pseudoscalarilor în fig. 37 s-a reprezentat numai un semn al acestor mărimi. În același timp, de exemplu, pentru grupul $m3m$ este posibilă și o altă reprezentare. În acest caz scalarul va fi „negativ", deși în desen a fost reprezentat formal „pozitiv", simbolizat printr-un cerculeț negru. La rîndul său, figura ce reprezintă grupul $\underline{m}3\underline{m}$ poate fi considerată „dreaptă", în timp ce figura „stîngă" aparținînd acestui grup poate fi reprezentată formal printr-un cerculeț cu săgeată

* Uneori vectorii axiali se mai denumesc și pseudovectori, iar tensorii axiali — pseudotensori.

Scanned with OKEN Scanner

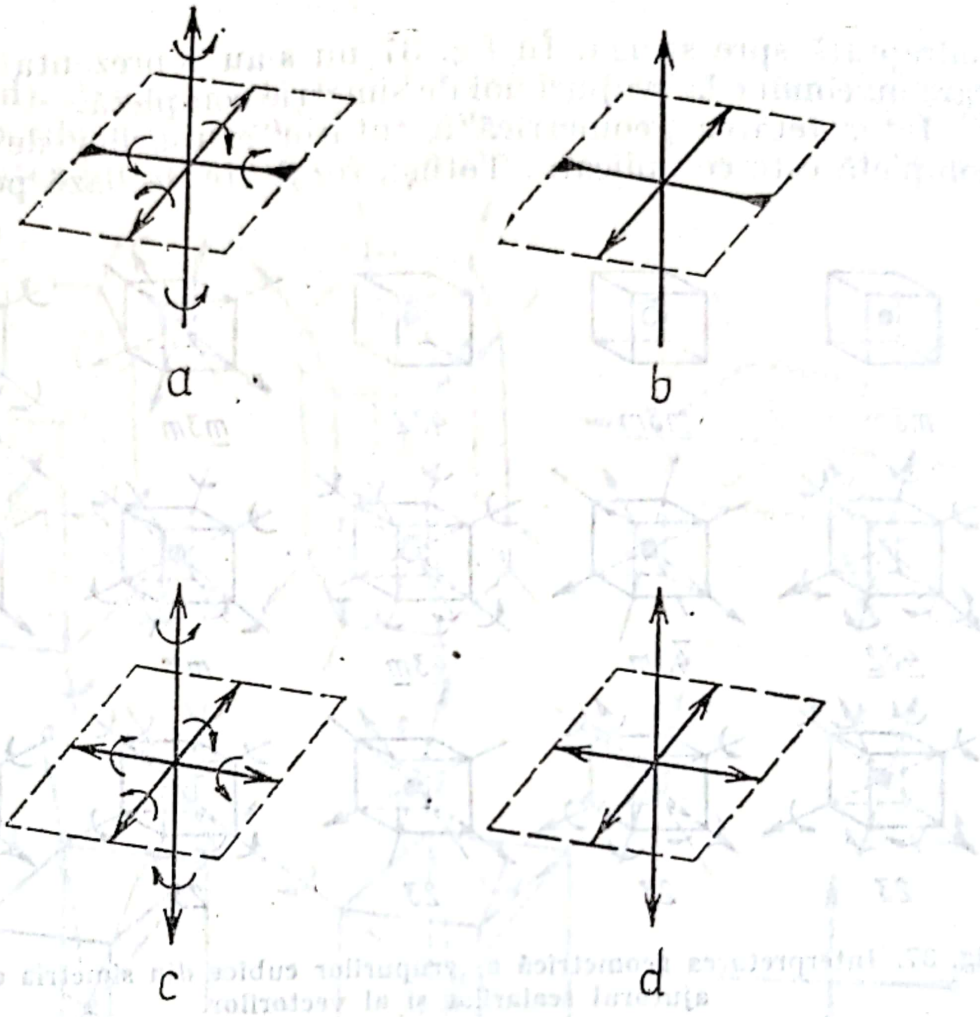


Fig. 36. Interpretarea unor grupuri ale simetriei complete cu ajutorul mărimilor descrise de tensori de ordinul doi:

a) $\begin{bmatrix} a_{11} & -a_{12} & 0 \\ a_{12} & -a_{11} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ „+" $\begin{bmatrix} A_{11} & -A_{12} & 0 \\ A_{12} & -A_{11} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

grupul $\underline{222}$ (grupul de simetrie obișnuită 2);

b) $\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & -a_{11} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ „+" $\begin{bmatrix} 0 & -A_{12} & 0 \\ A_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

grupul $\bar{4}2m$ (grupul de simetrie obișnuită $mm2$);

c) $\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{11} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{bmatrix}$ „+" $\begin{bmatrix} A_{11} & 0 & 0 \\ 0 & A_{11} & 0 \\ 0 & 0 & A_{33} \end{bmatrix}$

grupul 422 (grupul de simetrie obișnuită 422);

d $\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{11} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{bmatrix}$

grupul $4/mmm$ (grupul de simetrie obișnuită $4/mmm$).

Scanned with OKEN Scanner

îndreptată spre stînga. În fig. 37 nu s-au reprezentat cazurile care nu conduc la grupuri noi de simetrie completă.

Interpretarea geometrică a tuturor grupurilor de simetrie completă este complicată. Totuşi, rezultate de bază pot fi obţi-

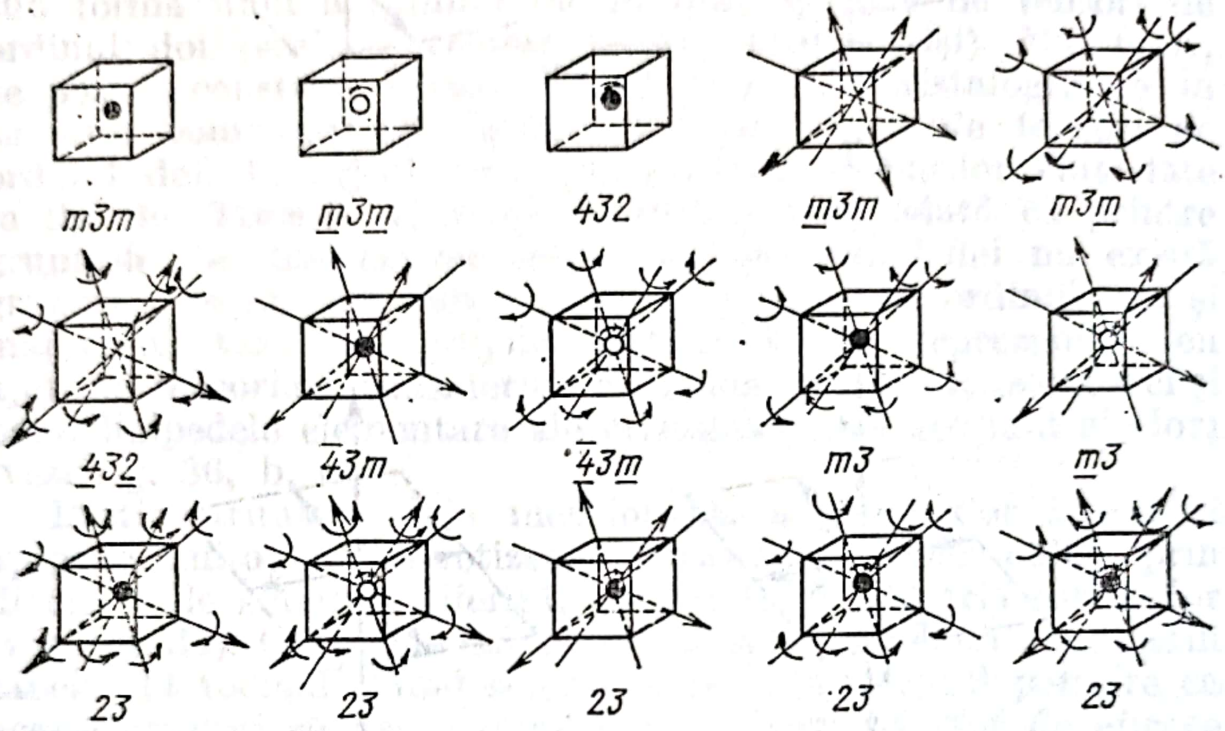


Fig. 37. Interpretarea geometrică a grupurilor cubice din simetria completă cu ajutorul scalarilor şi al vectorilor.

nute prin analizarea cîtorva grupuri importante. Unele dintre acestea sînt grupurile tensorului polar, subordonate grupului ∞/mmm. Grupurile de cea mai înaltă simetrie subordonate acestui grup vor fi grupurile cristalografice $6/mmm$ şi $4/mmm$. Toate grupurile simetriei obişnuite, cu excepţia celor cubice, sînt subordonate acestor grupuri. Grupurile analoge celor abia menţionate sînt $6/\underline{mmm}$ şi $4/\underline{mmm}$. Ele sînt subordonate grupului $\infty/\underline{mmm}$. Aceste grupuri descriu simetria figurilor care au un singur semn, determinat, de enantiomorfism. Drept criteriu pentru toate aceste grupuri este existenţa componentelor axial-tensoriale de un singur semn.

Este interesantă interpretarea duală a cîtorva grupuri cristalografice. Astfel, există două tipuri de grupuri subordonate grupului $\infty/mm\underline{m}$. De exemplu, grupul $\underline{6}/mm\underline{m}$ poate fi reprezentat prin intermediul tensorilor axiali (fig. 38, a) şi al vectorilor polari (fig. 38, b, c). Grupul $\underline{4}/mm\underline{m}$ poate fi interpretat cu ajutorul tensorilor polari (fig. 38, d, f) şi al vectorilor axiali

Scanned with OKEN Scanner

(fig. 38, d). Același lucru se întîmplă și la interpretarea grupurilor subordonate grupului $\underline{\infty}/\underline{m}\underline{m}\underline{m}$ (fig. 39). În legătură cu posibilitatea interpretării duale a grupurilor $\underline{\infty}/mm\underline{m}$ și $\underline{\infty}/\underline{m}m\underline{m}$

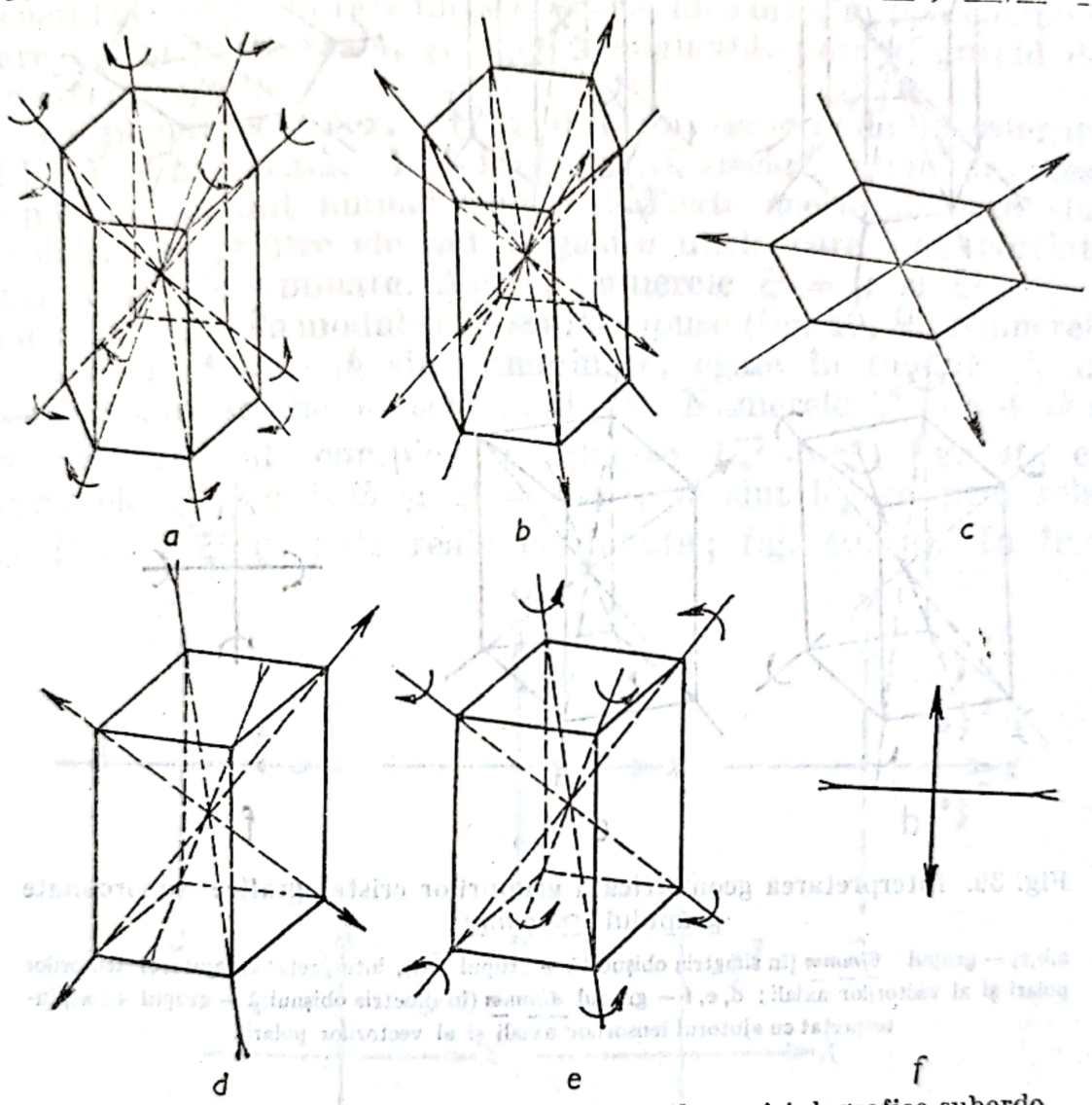


Fig. 38. Interpretarea geometrică a grupurilor cristalografice subordonate grupului $\underline{\infty}/mm\underline{m}$:
a,b,c — grupul $6/mmm$ (în simetria obișnuită — grupul $\bar{6}\,m2$), interpretat cu ajutorul tensorilor axiali și al vectorilor polari; d, e, f — grupul $4/m\underline{m}\underline{m}$ (în simetria obișnuită — grupul mmm), interpretat cu ajutorul tensorilor polari și al vectorilor axiali.

grupurile cristalografice se împart în două (vezi tabelul 14). Astfel, grupurile care includ componente polar-vectoriale și axial-vectoriale din seria grupurilor $\overline{\infty}mm$ au o axă $\bar{4}$ în cazul componentelor pseudovectoriale și axe $\bar{2}$ și $\bar{6}$ (grupurile $2/m$ și $\bar{3}m$) în cazul componentelor polar-vectoriale ș.a.m.d.

În capitolul 3 se vor folosi tabelul 14 și figurile 35, 39 pentru stabilirea particularităților proprietăților fizice ale cristalelor.

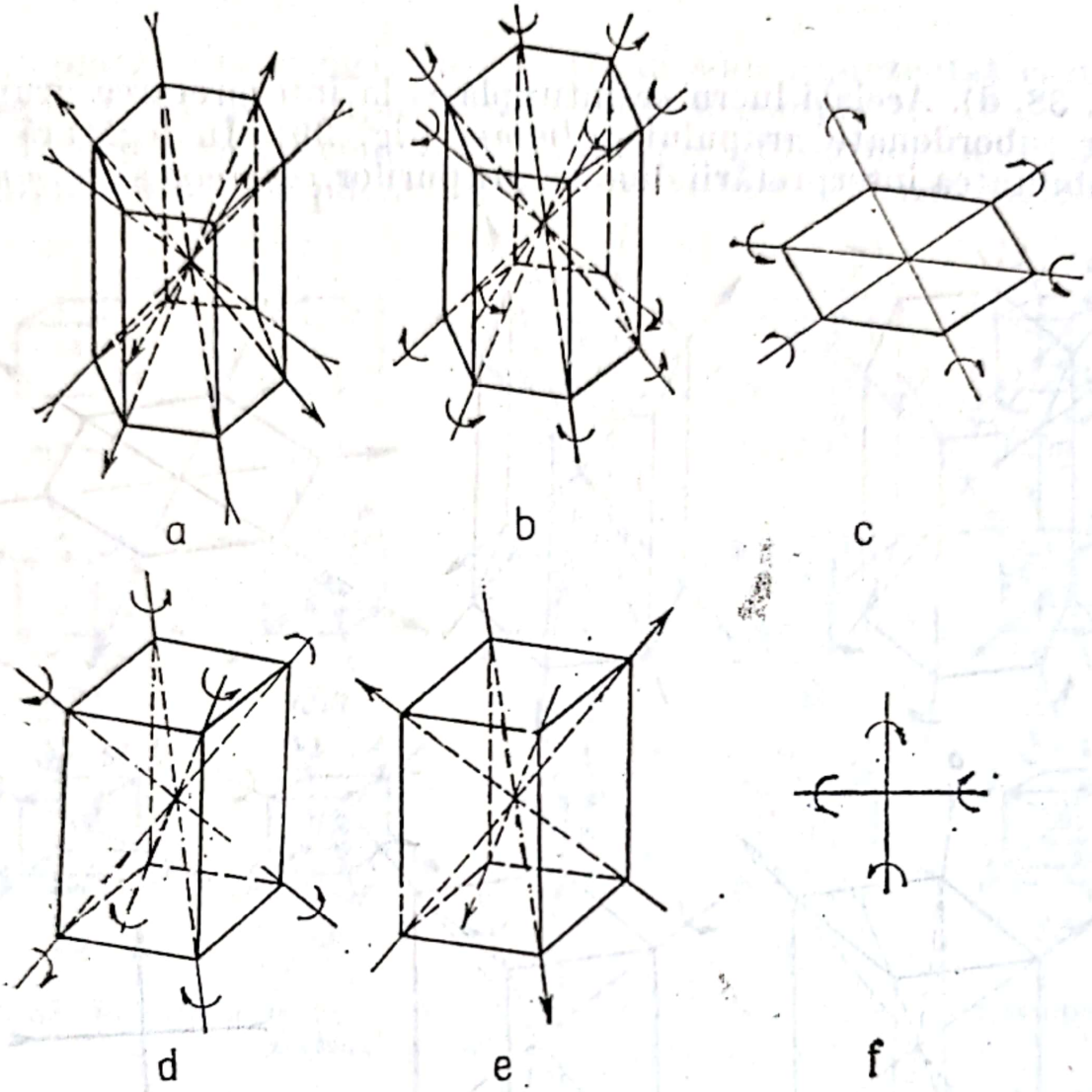


Fig. 39. Interpretarea geometrică a grupurilor cristalografice subordonate grupului $\underline{\infty/m}\,\underline{m}\,\underline{m}$:

a,b,c, — grupul $\underline{6/m}\,\underline{m}\,\underline{m}$ (în simetria obişnuită — grupul $\bar{3}\,m$), interpretat cu ajutorul tensorilor polari şi al vectorilor axiali; d, e, f — grupul $\underline{4/m}\,\underline{m}\,\underline{m}$ (în simetria obişnuită — grupul $\bar{4}2\,m$), interpretat cu ajutorul tensorilor axiali şi al vectorilor polari.

2.4. SIMETRIA NUMERELOR COMPLEXE ŞI A SPINORILOR

a) NUMERELE COMPLEXE

Partea reală a unui număr complex $a + ib$, mărimea a (ca şi orice număr real) are simetria scalarului (grupul $\infty/\infty/mmm$). Este raţional să considerăm că partea imaginară a acestui număr, adică mărimea ib, are simetria pseudoscalarului (grupul $\infty/\infty/\underline{m}\,\underline{m}\,\underline{m}$). În aceste condiţii, numerele complexe pot fi reprezentate sub forma unor combinaţii de scalari şi pseudo-

Scanned with OKEN Scanner

scalari. În total, asemenea combinații pot fi patru (vezi fig. 28)*. Fiecare dintre ele are grupul de simetrie $\infty/\infty 2$ (sferă fără plane de oglindire m și fără plane de antioglindire $\underline{m}$). Sferele reprezentate în fig. 28, tratate ca numere complexe, au părțile reală și imaginară egale în valoare absolută ($|a| = |b|$). În cazul general această egalitate nu se observă, însă orice număr complex care are și parte reală, și parte imaginară, posedă grupul de simetrie $\infty/\infty 2$.

În planul complex, avînd dat un sistem de coordonate XY (X — axa reală, Y — imaginară), fiecărui punct îi corespunde un anumit număr complex. Toate aceste numere sînt diferite, dar printre ele pot fi găsite unele care sînt corelate prin relații determinate. Astfel, numerele $\xi^1 = a$ și $\xi^2 = -a$ sînt reale, egale în modul și de semne opuse (fig. 40, a). Numerele $\xi^3 = ib$ și $\xi^4 = -ib$ sînt imaginare, egale în modul și, de asemenea, au semne opuse (fig. 40, b). Numerele $\xi^5 = a + ib$ și $\xi^6 = a - ib$ sînt complex conjugate ($\xi^5 = \overline{\xi^6}$; fig. 40, c). Numerele $\xi^7 = a + ib$ și $\xi^8 = -a + ib$ sînt legate prin relația $\xi^8 = -\overline{\xi^7}$ (părțile reale conjugate; fig. 40, d). În fine,

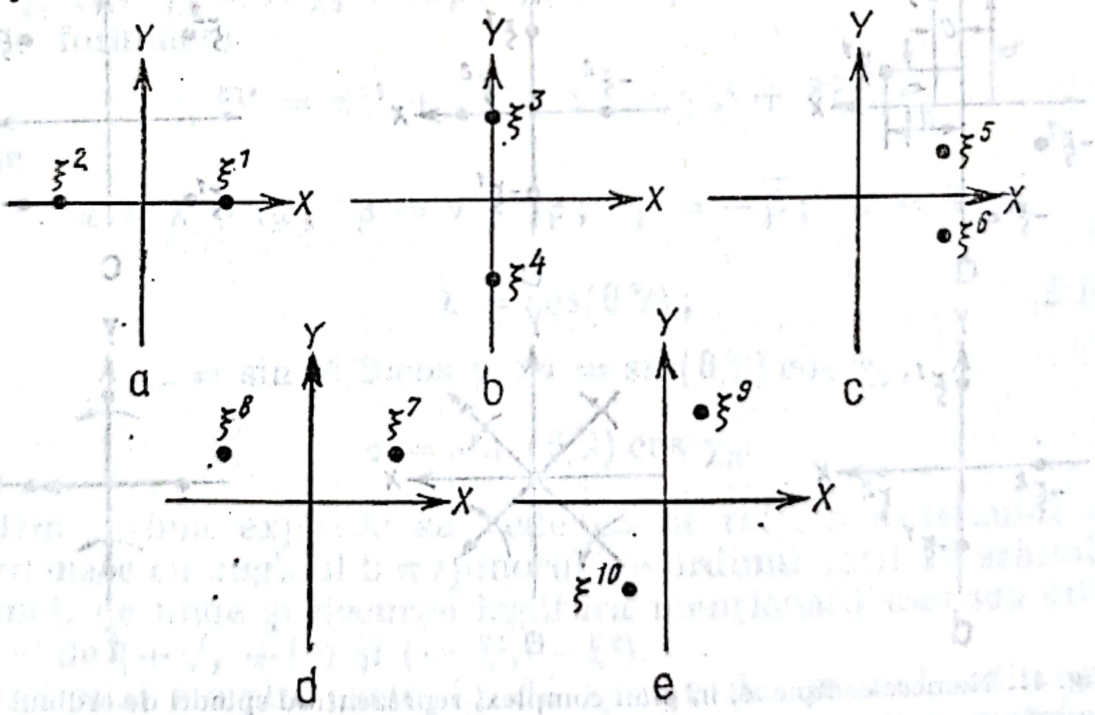


Fig. 40. Cîteva ansambluri de numere complexe:
a) $\xi^1 = a$, $\xi^2 = -a$; b) $\xi^3 = ib$; $\xi^4 = -ib$; c) $\xi^5 = a + ib$; $\xi^6 = a - ib$; d) $\xi^7 = a + ib$; $\xi^8 = -a + ib$; e) $\xi^9 = a + ib$, $\xi^{10} = -a - ib$.

* În general, se pot considera și alte combinații de numere complexe, de exemplu, combinația de doi scalari și doi pseudoscalari. Totuși, se vede ușor că toate aceste combinații nu ies, ca simetrie, din cadrul grupurilor de simetrie ale scalarilor $\infty/\infty/mmm$), pseudoscalarilor ($\infty/\infty/\underline{mmm}$) și a combinațiilor lor ($\infty/\infty 2$).

Scanned with OKEN Scanner

numerele $\xi^9 = a + ib$ și $\xi^{10} = -a - ib$ sînt de semne opuse fig. 40, e). Analizînd perechile de mărimi reprezentate în fig. 40 se poate găsi simetria lor : perechea din fig. 40, a are grupul vectorului polar $(\infty/\underline{m}mm)$, perechea din fig. 40, b — grupul vectorului axial $(\infty/\underline{m}\underline{m}\underline{m})$, perechea din fig. 40, c — grupul ∞/m, perechea din fig. 40, d — grupul $\infty/\underline{m}$, iar perechea din fig. 40, e — grupul $\infty\underline{2}$.

Pentru aflarea simetriei perechii de numere reprezentate în fig. 40, c se poate deplasa sistemul de coordonate pînă într-o poziție în care punctele apar pe axa Y. Perechea astfel „transformată" are simetria vectorului axial $(\infty/m\underline{m}\underline{m})$. Deoarece numerele ξ^5 și ξ^6 conțin o parte reală, nu vor exista plane de antisimetrie paralele la axa ∞, ceea ce conduce la grupul ∞/m. Analog pot fi găsite grupurile de simetrie ale perechii ξ^7 și ξ^8 (prin deplasarea sistemului de coordonate pînă ce punctele considerate coincid cu axa X) și ale perechii ξ^9 și ξ^{10} (două rotații care conduc la eliminarea tuturor planelor și antiplanelor).

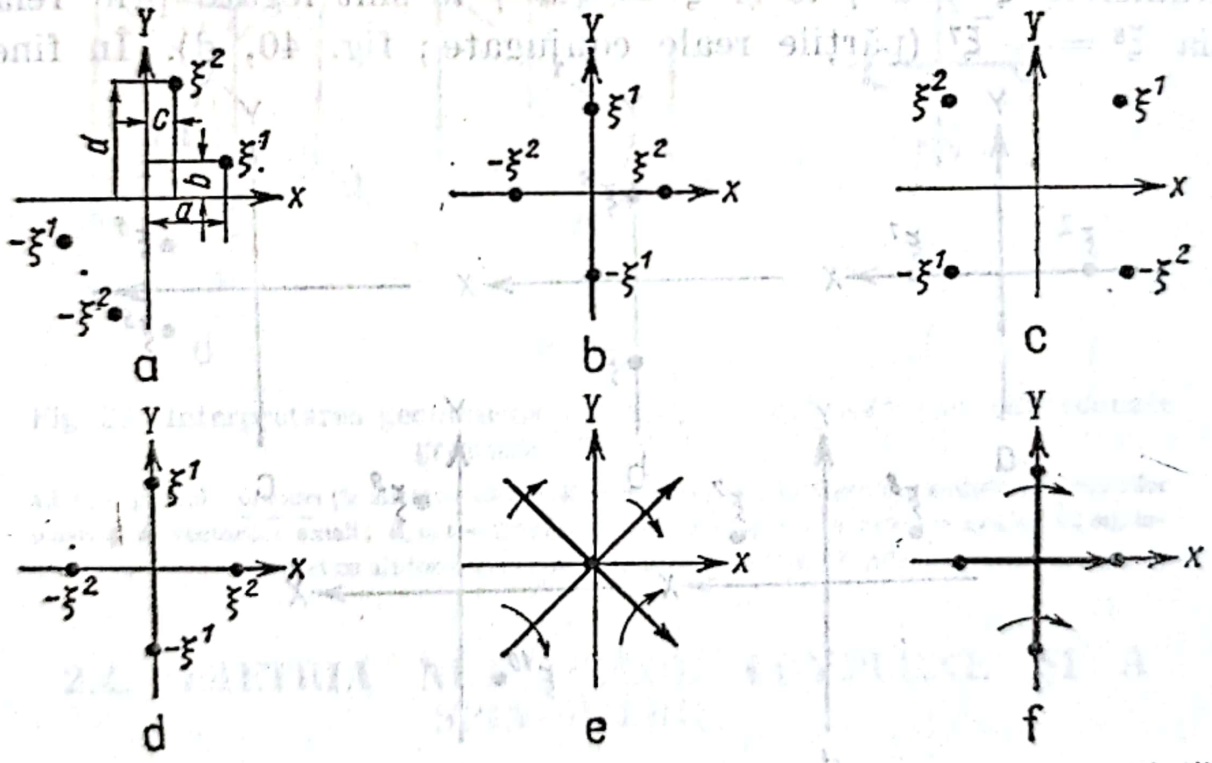


Fig. 41. Numere complexe, în plan complex, reprezentînd spinori de ordinul întîi : a — spinor oarecare; b — spinor „simetric" de forma $\xi^1 = ib$, $\xi^2 = a$; c — sipnor de forma $\xi^1 = a + ia$, $\xi^2 = -a + ia$; d — spinorul reprezentat în fig. 41, c într-o altă orientare a sistemului de coordonate $(\xi^1 = ia^*, \xi^2 = a^*)$; e, f — interpretarea vectorială a spinorilor din figurile 41, c și d.

Două perechi de numere complexe, în cazul general, $\pm\xi^1 = \pm(a + ib)$ și $\pm\xi^2 = \pm(c + id)$ au grupul de simetrie $\underline{2}$ (axa $\underline{2}$ coincide cu axa Z; fig. 41, a). Dacă aceste perechi sînt „reciproc perpendiculare", la rotirea sistemului de coordonate

Scanned with OKEN Scanner

ele pot fi aduse la forma reprezentată în fig. 41, b. Grupul de simetrie al unei astfel de perechi — ca ansamblu de vectori polar și axial întretăindu-se perpendicular — este grupul $\underline{m}m\underline{2}$. În acest caz antiplanul de simetrie $\underline{m}$ trece prin axa imaginară ($\overline{Y}$) și este perpendicular pe planul desenului, iar planul de simetrie m trece prin axa reală (X). Într-un caz și mai particular $\pm\xi^1 = \pm(a + ia)$ și $\pm\xi^2 = \pm(-a + ia)$, reprezentat în fig. 41, c și d, simetria ansamblului este descrisă de asemenea de grupul $\underline{m}m\underline{2}$. Prezintă interes interpretarea vectorială a ultimului ansamblu, căreia îi corespund fig. 41, b și c și este dată în fig. 41, e și f respectiv.

b) SPINORII

Prin definiție, un spinor de ordinul *întîi* este dat prin perechea de numere complexe (ξ^1, ξ^2), numite componentele spinorului. Se consideră, astfel, că perechile ($+\xi^1$, $+\xi^2$) și ($-\xi^1$, $-\xi^2$) determină unul și aceeași spinor și că la rotirea sistemului de coordonate cu unghiul θ în jurul axei determinată de cosinușii $\cos\chi_1$ $\cos\chi_2$, $\cos\chi_3$ componentele spinorului se transformă după formulele

$$\xi^{1\prime} = \alpha\xi^1 + \beta\xi^2; \quad \xi^{2\prime} = \gamma\xi^1 + \delta\xi^2 \tag{2.9}$$

unde

$$\alpha = \lambda + i\mu; \quad \beta = \nu + i\rho; \quad \gamma = -\overline{\beta}; \quad \delta = \overline{\alpha};$$

$$\lambda = \cos(\theta/2); \tag{2.10}$$

$$\mu = \sin(\theta/2)\cos\chi_1; \; \nu = \sin(\theta/2)\cos\chi_2;$$

$$\rho = \sin(\theta/2)\cos\chi_3.$$

Din ultima expresie se vede că la rotirea sistemului de coordonate cu unghiul 2π spinorul de ordinul întîi își schimbă semnul, de unde și decurge legătura menționată mai sus între perechile ($+\xi^1$, $+\xi^2$) și ($-\xi^1$, $-\xi^2$).

Cel mai simplu exemplu de spinor de ordinul întîi este funcția de undă a electronului, care are spinul 1/2 și matricea unitate ($\overline{\sigma} = \sigma^{-1}$)* de transformare

$$\sigma = \left\| \begin{matrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{matrix} \right\|. \tag{2.11}$$

* Bara deasupra simbolului înseamnă aici complex conjugat.

Scanned with OKEN Scanner

În concordanţă cu definiţia spinorilor de ordinul întîi, atunci cînd se analizează simetria acestora trebuie să se cerceteze doar ansambluri care conţin două perechi de numere complexe. Asemenea ansambluri de două perechi sînt date în fig. 41, a — d.

Să analizăm pentru început simetria ansamblului de numere reprezentat în fig. 41, c. Pentru aflarea elementelor de simetrie în cazul *rotaţiilor* se folosesc formulele (2.9) şi (2.10). În cazul particular cînd ansamblul reprezentat în figură se roteşte în jurul axelor sistemului de coordonate X, Y şi Z (sau, ceea ce este acelaşi lucru, cînd sistemul de coordonate se roteşte în jurul axelor sale), numerele ξ^1 şi ξ^2 se transformă după formulele

$$\left.\begin{aligned} \xi^{1'} &= [\cos(\theta/2) + i\sin(\theta/2)]\xi^1, \\ \xi^{2'} &= [\cos(\theta/2) - i\sin(\theta/2)]\xi^2; \end{aligned}\right\} \tag{2.12}$$

$$\left.\begin{aligned} \xi^{1'} &= \cos(\theta/2)\,\xi^1 + \sin(\theta/2)\,\xi^2, \\ \xi^{2'} &= -\sin(\theta/2)\,\xi^1 + \cos(\theta/2)\,\xi^2; \end{aligned}\right\} \tag{2.13}$$

$$\left.\begin{aligned} \xi^{1'} &= \cos(\theta/2)\,\xi^1 + i\sin(\theta/2)\,\xi^2, \\ \xi^{2'} &= i\sin(\theta/2)\,\xi^1 + \cos(\theta/2)\,\xi^2, \end{aligned}\right\} \tag{2.14}$$

formula (2.12) corespunde rotaţiei în jurul axei X, formula (2.13) — rotaţiei în jurul axei Y şi formula (2.14) — rotaţiei în jurul axei Z.

O verificare imediată arată că la rotaţiile în jurul oricăreia dintre axele X, Y şi Z componentele ξ^1 şi ξ^2 nu sînt niciodată egale (sau antiegale) cu cele iniţiale. Astfel. de exemplu, în cazul rotaţiilor de 180° (unghiul π) în jurul axelor X, Y şi Z noile componente vor avea respectiv valorile

$$\begin{aligned} &\xi^{1'} = \xi^2; \quad \xi^{1'} = \xi^2; \quad \xi^{1'} = -\xi^1 \\ &\xi^{2'} = \xi^1; \quad \xi^{2'} = -\xi^1; \quad \xi^{2'} = \xi^2. \end{aligned} \tag{2.15}$$

Constituie excepţie doar rotaţia de 360° (unghiul 2π) în jurul oricărei axe (între altele, şi în jurul axelor X, X, Y şi Z), în care caz este îndeplinită condiţia $\xi^{1'} = -\xi^1$; $\xi^{2'} = -\xi^2$.

Ansamblul numerelor reprezentate în fig. 41, c nu are şi elemente de simetrie de rotaţie-oglindire. Astfel, la rotirea sistemului de coordonate cu 180° în jurul axei Z şi reflectarea într-

Scanned with OKEN Scanner

un plan perpendicular pe această axă, componentele spinorului (ξ^1, ξ^2) se transformă în modul următor

$$\xi^{1'} = \xi^2; \quad \xi^{2'} = -\xi^1. \tag{2.16}$$

[Relaţia (2.16) se obţine din (2.15) luînd în considerare faptul că prin reflectare partea imaginară a unui număr complex îşi schimbă semnul.] Relaţia (2.16) conduce la concluzia că axa Z nu este axă de rotaţie-oglindire sau rotaţie-antioglindire. La rîndul lor, rotaţia sistemului de coordonate cu 360° în jurul axei Z şi reflectarea în planul XY conduc la următoarele formule de transformare a componentelor spinorului de ordinul întîi

$$\xi^{1'} = \xi^2; \quad \xi^{2'} = \xi^1$$

de unde rezultă că planul XY nu este nici plan, nici antiplan de simetrie pentru spinorul considerat.

Spinorul reprezentat în fig. 41, c nu are nici centru, nici anticentru de simetrie. Într-adevăr, conform formulelor de transformare a componentelor spinorului de ordinul întîi în cazul inversării sistemului de coordonate ($X \to -X$; $Y \to -Y$; $Z \to -Z$), are loc relaţia

$$\xi^{1'} = -\bar{\xi}^2 = \xi^1; \quad \xi^{2'} = -\xi^2 \tag{2.17}$$

care confirmă cele de mai sus.

Prin urmare, perechea de numere (ξ^1, ξ^2) care defineşte spinorul de ordinul întîi, nu se transformă în ea însăşi prin niciuna dintre operaţiile considerate. Numai în cazul rotaţiilor de 360° în jurul oricăreia dintre axe, această pereche se transformă în perechea $(-\xi^1, -\xi^2)$. Conform definiţiei spinorului de ordinul întîi aceste perechi sînt considerate identice. Din cele spuse aici rezultă că spinorul de ordinul întîi are drept operaţie de simetrie obişnuită (precum şi de simetrie completă) doar operaţia 1 şi este descris de grupul de simetrie 1.

Din punct de vedere al operaţiilor obişnuite, adică atunci cînd se consideră că perechile (ξ^1, ξ^2) şi $(-\xi^1, -\xi^2)$ diferă (sînt „opuse"), spinorul de ordinul întîi se comportă cu totul particular: el îşi schimbă semnul la rotirea cu 2π în jurul oricărei direcţii. Numai în cazul rotaţiei cu 4π acest spinor ia din nou valoarea iniţială. Faptul menţionat este condiţionat de aceea că,

la rotirea sistemului de coordonate cu unghiul θ, modificarea spinorului de ordinul întîi corespunde unei variații cu $\theta/2$ a unghiului θ [vezi formulele (2.12) — (2.14)].

O reprezentare mai mult sau mai puțin intuitivă asupra spinorilor de ordinul întîi și asupra simetriei lor se poate obține și din fig. 41. Astfel, figurile geometrice care reprezintă ansamblul de numere complexe din fig. 41, e și f au grupul de simetrie $\underline{m}m\underline{2}$. Trecerea de la unghiul θ în formulele de transformare a vectorilor la unghiul $\theta/2$ pentru spinori conduce la faptul că sistemul pierde trei elemente de simetrie completă ($\underline{m}$, m și $\underline{2}$). Pe lîngă aceasta, din fig. 41, e și f se vede bine că rezultatul rotirii sistemului de coordonate cu unghiul π este schimbarea la spinor atît a orientării vectorului axial (spinului) cît și a vectorului polar în sensul opus.

Mai înainte s-a analizat simetria celui mai simetric spinor de ordinul întîi, definit în fapt de un singur număr ($\pm a$ $\pm ib$). Toți ceilalți spinori, fiind de simetrie mai joasă, nu vor avea elemente de simetrie noi. În același timp, elementul de simetrie1 se conservă pentru toți spinorii de ordinul întîi, adică toți spinorii de acest ordin au grupul de simetrie de ordinul întîi 1.

Spinorii de ordinul *doi* sînt dați de un ansamblu de patru numere complexe ξ^{11}, ξ^{12}, ξ^{21}, ξ^{22}, determinate cu precizie pînă la semn și care se transformă prin trecerea de la un sistem de coordonate la altul ca produsul componentelor spinorului de ordinul întîi $\xi^1\xi^1$, $\xi^1\xi^2$, $\xi^2\xi^1$, $\xi^2\xi^2$ respectiv. În cazul simetriei celei mai înalte, ansamblul celor patru numere complexe care definesc spinorul de ordinul doi are, evident, forma $\pm a$ $\pm ia_y$. Astfel, spinorul considerat de noi are componentele $\xi^{11} = a_z + ia$, $\xi^{22} = -a_z + ia$, $\xi^{12} = a_x + ia$, $\xi^{21} = a_x - ia$ (fig. 42)*.

Simetria spinorilor de ordinul doi poate fi stabilită analitic. Studiul arată, de exemplu, că în cazul rotațiilor de 360° spinorul de ordinul doi se transformă în sine însuși. La rîndul său, aceasta înseamnă că și rotațiile cu oglindire (între altele, și rotațiile $\bar{1}$, plan de simetrie) sînt obișnuite la asemenea spinori. Trebuie doar să se aibă în vedere că la reflectări partea imaginară a numărului complex își schimbă semnul.

Ne putem convinge ușor că pentru spinorul reprezentat în fig. 42 planul XZ este plan de simetrie. Într-adevăr, la reflec-

---

* Indicii inferiori x, y, z indică, respectiv, proiecțiile pe axele X, Y și Z. Axa Y este axă imaginară.

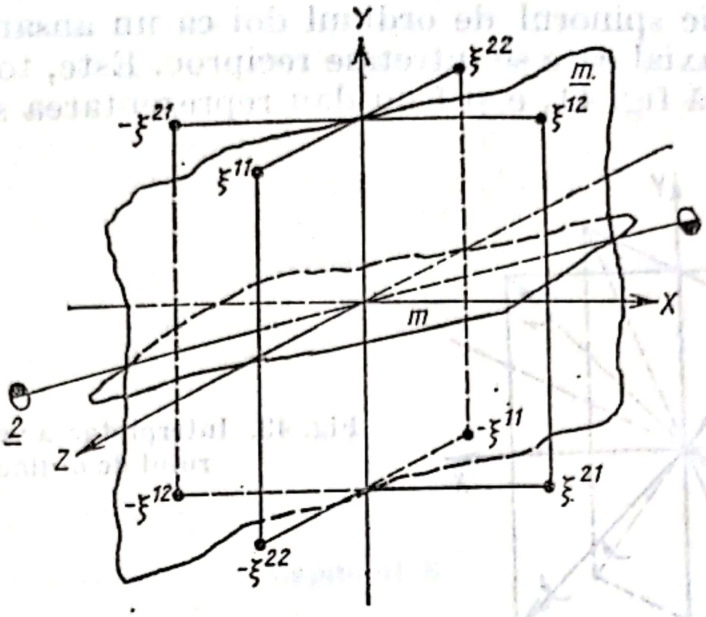


Fig. 42. Spinor de ordinul doi de forma $\pm a_x \pm ia$ și elementele lui de simetrie completă.

tarea în acest plan componentele tensorului se transformă în modul următor

$$\left.\begin{aligned} \xi^{11'} &\to (a_z - ia); \quad \xi^{22'} \to -(a_z + ia); \\ \xi^{12'} &\to (a_x - ia); \quad \xi^{21'} \to (a_x + ia) \end{aligned}\right\} \tag{2.18}$$

sau

$$\left.\begin{aligned} \xi^{11'} &\to -\xi^{22}; \quad \xi^{22'} \to -\xi^{11}; \\ \xi^{12'} &\to \xi^{21}; \quad \xi^{21'} \to \xi^{12}, \end{aligned}\right\} \tag{2.19}$$

ceea ce corespunde tocmai planului de simetrie m (vezi fig. 42). Analog se constată că planul care trece prin axa Y și bisectoarea unghiului dintre axele X și $-Z$ este planul de antisimetrie $\underline{m}$, iar bisectoarea unghiului drept dintre axele X și $-Z$ va fi anti-axă $\underline{2}$. În felul acesta, simetria completă a spinorului considerat e descrisă de grupul $\underline{m}m\underline{2}$, care este același grup ce descria și simetria numerelor complexe reprezentate în fig. 41, b — f (unde se dădea interpretarea spinorilor de ordinul întîi). Spinorii de ordinul doi pot fi reprezentați sub forma unui ansamblu de vectori polari și axiali (fig. 43). În încheiere, observăm că și spinorul de ordinul doi de tipul cel mai general $(\pm a_x \pm ib)$ are grupul de simetrie completă $\underline{m}m\underline{2}$.

Identitatea simetriei figurilor reprezentate în fig. 41, e și f cu simetria figurii reprezentate în fig. 43 permite să interpre-

tăm geometric spinorul de ordinul doi ca un ansamblu de vectori polar și axial care se întretaie reciproc. Este, totuși, necesar să amintim că fig. 41, e și f nu dau reprezentarea spinorului de

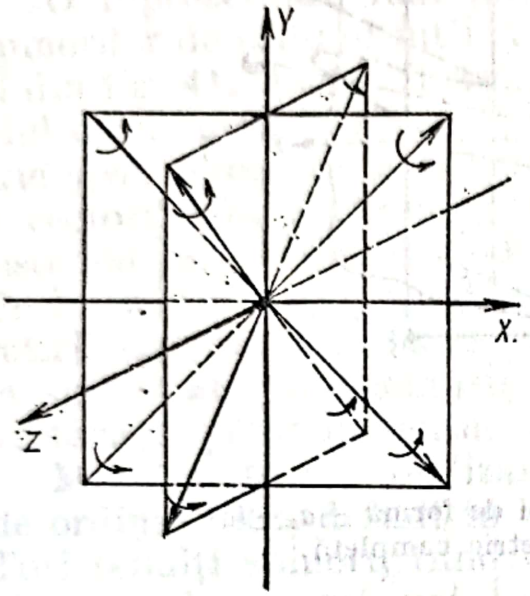


Fig. 43. Interpretarea vectorială a spinorului de ordinul doi.

ordinul întîi în felul acesta, deoarece formulele de transformare ale componentelor spinorului de ordinul întîi diferă de formulele de transformare ale figurilor geometrice obișnuite. Spinorii de ordinul întîi sînt descriși de grupul de simetrie completă 1, iar spinorii de ordinul doi — de grupul $\underline{m}m\underline{2}$.

Capitolul 3

APLICAȚIILE SIMETRIEI ÎN FIZICA CRISTALELOR (CRISTALOFIZICĂ)

Proprietățile fizice ale mediilor anizotrope și izotrope diferă din multe puncte de vedere. La înțelegerea acestui fapt adeseori ajută folosirea simetriei. Tocmai de aceea sînt atît de variate aplicațiile simetriei la studiul proprietăților cristalelor. În sensul larg al cuvîntului, aceste aplicații se referă la *fizica cristalelor*, iar într-un sens mai restrîns — la *cristalografia tensorială* (*fizică*). Această precizare este necesară datorită faptului că fizica cristalelor cuprinde toate fenomenele (incluzînd aici și esența lor), în timp ce cristalografia fizică consideră doar caracteristicile formale ale unor fenomene sau altora, legate de simetria (și anizotropia) cristalelor. În acest capitol ne vom ocupa, în principal, de problemele tipice pentru cristalografia fizică.

3.1. SIMETRIA PROPRIETĂȚILOR ȘI SIMETRIA CRISTALELOR

a) CÎMPURI FIZICE ȘI SIMETRIA LOR

Din punct de vedere al unor proprietăți fizice cristalele ne apar ca medii continue omogene (vezi § 1.5). Un astfel de mediu

Scanned with OKEN Scanner

este, în general, *anizotrop*. Prin anizotropie se înţelege neunivocitatea proprietăţilor mediului după diferite direcţii. În cazul general această deosebire poate avea natură polară, axială, de răsucire, polar-tensorială (vezi § 1.3). Un caz particular de anizotropie îl reprezintă unipolaritatea, care constă în faptul că proprietăţile mediului diferă în sensuri opuse — „înainte" şi „înapoi".

Proprietăţile unui cristal, ca mediu continuu omogen, sînt considerate rezultatul acţiunii asupra cristalului a unui *cîmp extern*. Prin cîmp se va înţelege aici un ansamblu de forţe care acţionează într-o anumită zonă din spaţiul omogen. Cîmpul va fi *omogen* dacă ansamblul forţelor menţionate nu distruge omogenitatea spaţiului. Simetria unui cîmp sau a altuia va fi considerată simetria unui punct din spaţiul în care acţionează cîmpul respectiv. O deosebire importanţă o au cîmpurile descrise de tensori de ordinul doi, a căror simetrie coincide cu simetria tensorilor înşişi (vezi § 1.5). Ne vom opri, pe scurt, asupra simetriei unor cîmpuri.

În cazul cel mai simplu, o forţă (în sensul în care este înţeleasă această noţiune în mecanică), precum şi un cîmp de forţe sînt caracterizate prin simetria vectorului polar (grupul ∞mm; în simetria completă — grupul $\infty/\underline{m}mm$). Prin vectori polari se descriu deplasarea **x** a particulelor, viteza **v**, acceleraţia **a**, impulsiul $m\mathbf{v}$ (unde m este masa). Interacţiunea a doi vectori polari — vectorul forţă **F** şi vectorul deplasare **r** — determină deformaţia mediului, care este deja caracterizată printr-un tensor de ordinul doi (vezi § 3.2).

O pereche (cuplu) de forţe dă naştere unui moment mecanic, care este vector axial (simetrie ∞/m; fig. 44, a). Tot vector axial este şi momentul impulsului $[m\mathbf{vR}]$ (fig. 44, b). Ansamblul de două perechi de forţe concurente, al căror moment acţionează de-a lungul unei drepte, generează *răsucirea* (*torsionarea*) respectivei direcţii (fig. 44, c). Simetria unei astfel de direcţii va fi descrisă de grupul $\infty 2$. Aceasta corespunde producerii unei deformaţii omogene a mediului, cînd toate direcţiile paralele sînt răsucite identic.

Dacă atribuim sarcinilor electrice (aşa cum se şi face de obicei) simetria de scalar, atunci cîmpul unei astfel de sarcini va fi polar-vectorial şi va avea simetria ∞mm (simetria completă $\infty/\underline{m}mm$). O asemenea simetrie o are şi vectorul polar inducţie electrică **D**, intensitatea cîmpului electric **E** şi polarizarea electrică **P**. Cîmpul electric omogen poate fi reprezentat drept

Scanned with OKEN Scanner

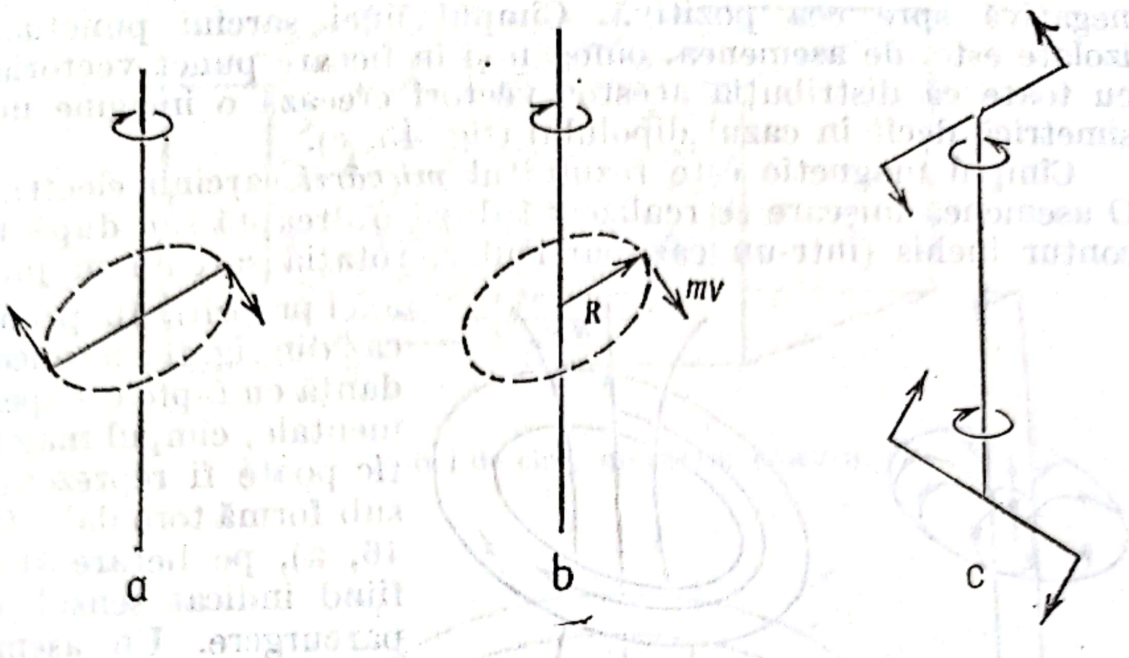


Fig. 44. Cupluri (perechi) de forțe :
a — cuplu de forțe care produce rotația unui corp (simetria vectorului axial ∞/m); b — momentul cinetic $[m\mathbf{vR}]$ ca vector axial; c — torsionarea ca rezultat al acțiunii a două cupluri de forțe concurente.

cîmpul dintre două plane infinite încărcate (fig. 45, a). Cîmpul dintre două sarcini punctuale de semne opuse nu este omogen. Tangentele la liniile de forță ale acestui cîmp sînt reprezentate de vectori polari intensitate a cîmpului electric **E** (fig. 45, b). Dipolul electric — două sarcini de aceeași valoare, dar de semne opuse, situate la o anumită distanță una de cealaltă — are, de asemenea, simetria vectorului polar. Tot un vector polar cu simetria ∞m este și momentul electric dipolar **p**, definit ca produsul sarcinii q cu distanța dintre sarcini **l**, adică $\mathbf{p} = q\mathbf{l}$. Acest vector (formal) se consideră orientat dinspre sarcina

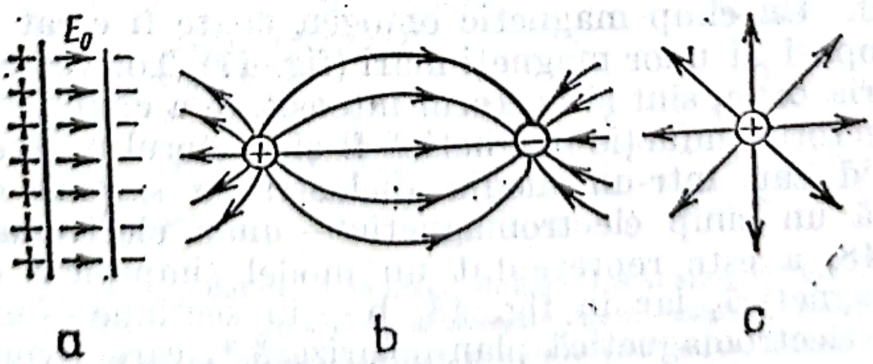


Fig. 45. Liniile de forță ale cîmpului electric în vid :
a — cîmpul electric omogen dintre două plane încărcate infinite; b — cîmp neomogen creat de un dipol electric; c — cîmp neomogen creat de o sarcină punctuală.

Scanned with OKEN Scanner

negativă spre cea pozitivă. Cîmpul unei sarcini punctuale izolate este, de asemenea, omogen și în fiecare punct vectorial, cu toate că distribuția acestor vectori creează o imagine mai simetrică decît în cazul dipolului (fig. 45, c).

Cîmpul magnetic este rezultatul *mișcării* sarcinii electrice. O asemenea mișcare se realizează după o dreaptă sau după un contur închis (într-un caz particular, rotația sarcinii în jurul axei proprii). În primul caz din fig. 46, în concordanță cu faptele experimentale, cîmpul magnetic poate fi reprezentat sub formă toroidală (fig. 46, a), pe fiecare spiră fiind indicat sensul de parcurgere. Un asemenea toroid are simetria ∞mm, adică simetria vectorului polar. Din desen se vede clar că **H** (cîmpul magnetic) este perpendicular pe direcția de mișcare a sarcinii (pe direcția curentului). Simetrie de vector polar are și densitatea de curent electric **j**.

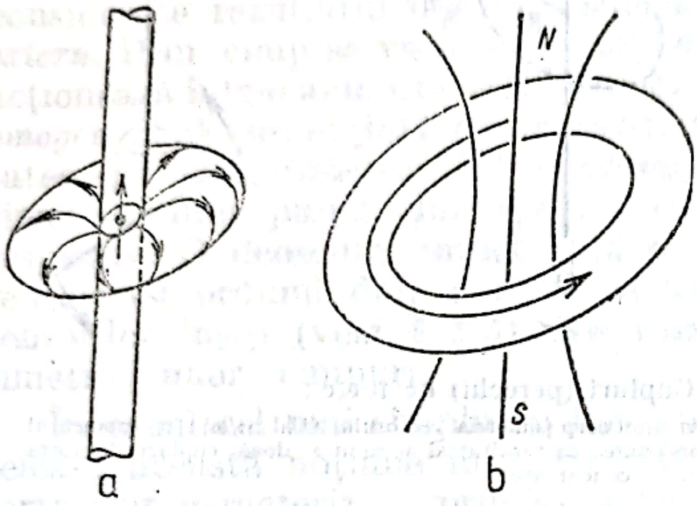


Fig. 46. Cîmpul magnetic al unor sarcini negative în mișcare:
a — mișcare liniară; b — mișcare circulară

În cazul mișcării unei sarcini electrice pe un contur închis (fig. 46, b) se creează în centrul conturului un cîmp magnetic care este orientat de-a lungul direcției perpendiculare pe planul conturului. Simetria cîmpului magnetic în acest caz este descrisă de grupul ∞/m (în cadrul simetriei complete — de grupul $\infty/m\underline{m}\underline{m}$). Așadar, cîmpul magnetic are simetrie de vector axial. Un cîmp magnetic omogen poate fi creat între cei doi poli opuși ai unor magneți mari (fig. 47). Tot vectori axiali, cu simetria ∞/m, sînt și vectorul intensitate a cîmpului magnetic **H**, vectorul inducție magnetică **B** și vectorul magnetizare **I**.

În vid sau într-un mediu dielectric o sarcină oscilantă generează un cîmp electromagnetic — unda electromagnetică. În fig. 48, a este reprezentat un model simplificat de undă electromagnetică, iar în fig. 48, b — în secțiune — un model de undă electromagnetică plan-polarizată *, care izvorăște din

* Unde electromagnetice plan-polarizate pot fi obținute cu ajutorul unui polaroid optic, care lasă să treacă oscilațiile vectorului electric situate într-un anumit plan.

Scanned with OKEN Scanner

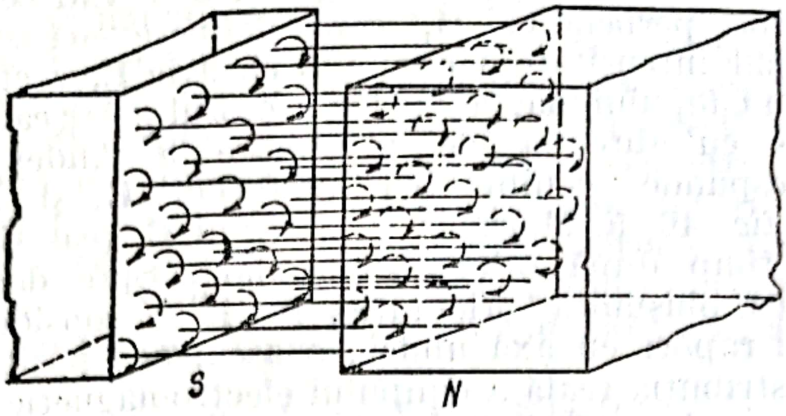


Fig. 47. Model de cîmp magnetic omogen.

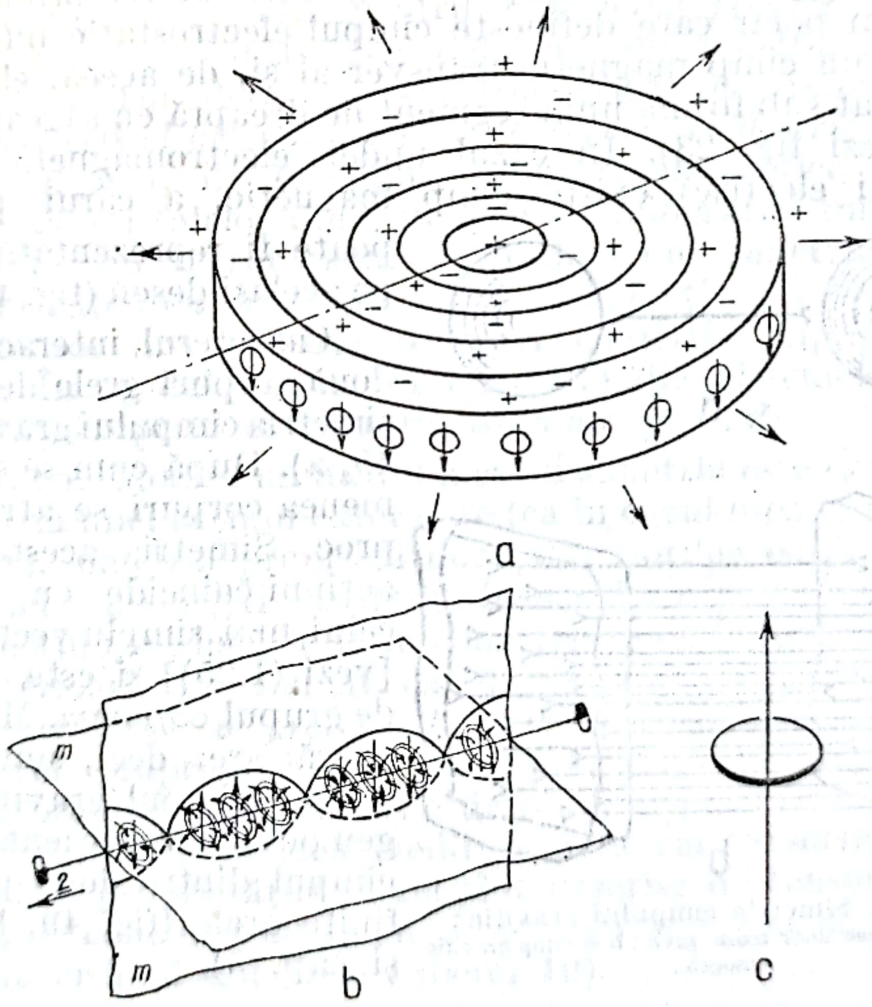


Fig. 48. Model de undă electromagnetică și simetria ei :
a — model simplificat (simetria totală ∞/mmm, simetria obișnuită ∞mm); b — undă plan polarizată (simetria $mm2$, simetria obișnuită m; simetria undei care se propagă de ambele părți $\bar{m}\bar{m}m$, simetria obișnuită $mm2$); c — reprezentare formală a undei electromagnetice (simetria $\infty/\bar{m}mm$, simetria obișnuită ∞mm).

Scanned with OKEN Scanner

sursă într-o anumită direcție. În fig. 48, b se văd cei trei vectori, reciproc perpendiculari, care definesc această undă: vectorul polar intensitate a cîmpului electric **E**, vectorul axial intensitate a cîmpului magnetic **H** și vectorul polar care coincide ca direcție cu direcția de propagare a undei. Modelul undei corespunde combinației vectorilor **E** și **H**, reprezentați în fig. 46, a. Mărimea vectorului **E** (ca și a lui **H**) variază în timp după o lege sinusoidală. Spre deosebire de reprezentarea obișnuită orientarea lui **E** se consideră, totuși, simetrică în raport cu axa undei; o asemenea poziție reflectă mai bine distribuția reală a cîmpului electromagnetic din undă. Din fig. 48 se observă că unda electromagnetică (o parte a ei sub formă de disc de dimensiuni finite) are grupul punctual de simetrie $\infty/\underline{m}mm$, adică grupul de simetrie al vectorilor polari. Vectorului polar care definește cîmpul electrostatic nu-i corespunde și un cîmp magnetic transversal și, de aceea, el trebuie reprezentat sub forma unui segment de dreaptă cu săgeată la un capăt (vezi fig. 23). În cazul undei electromagnetice (și al curentului electric) există cîmp magnetic, a cărui prezență poate fi reprezentată formal pe același desen (fig. 48, c).

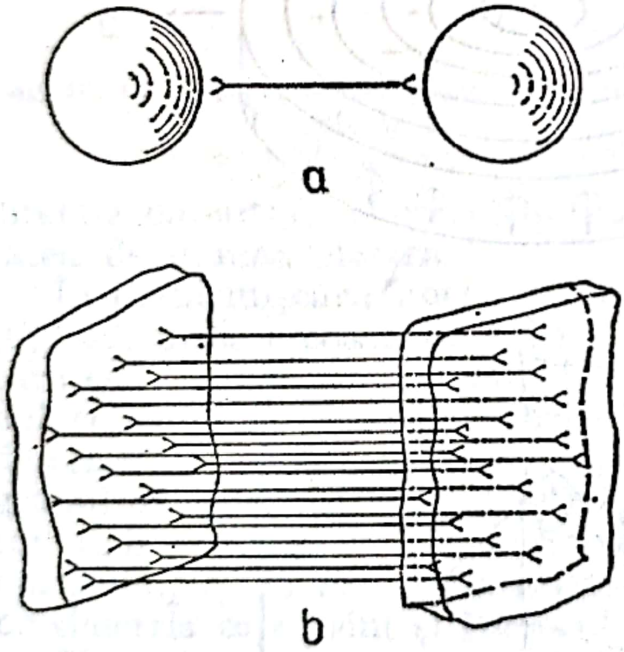


Fig. 49. Simetria cîmpului gravific: a — interacțiunea unor mase grele; b — cîmp gravific omogen..

Caracterul interacțiunii a două corpuri grele determină simetria cîmpului gravific (fig. 49, a). După cum se știe, asemenea corpuri se atrag reciproc. Simetria acestei interacțiuni coincide cu simetria celui mai simplu vector polar [vezi (1.25)] și este descrisă de grupul ∞/mmm. Masa gravifică are, deci, simetrie de scalar. Cîmpul gravific omogen poate fi reprezentat drept cîmpul dintre două plăci infinite grele (fig. 49, b) (vezi și cap. 5).

b) PRINCIPIUL LUI NEUMAN

Mai înainte prin simetrie a tensorilor s-a înțeles simetria lor proprie (intrinsecă). Această simetrie definește doar numărul de coeficienți independenți. În sistemul *principal* de coordonate

Scanned with OKEN Scanner

la tensor apar numai coeficienţii independenţi şi, deci, imediat apare vizibilă simetria lui. Într-un sistem oarecare de coordonate numărul coeficienţilor diferiţi de zero este mai mare decît numărul coeficienţilor independenţi şi, în acest caz, este în general greu de spus ceva precis despre simetria tensorului.

Tensorii polari şi axiali de ordinul doi pot fi consideraţi ca mărimi ce descriu o anumită acţiune fizică. Dacă această acţiune este aplicată asupra unui mediu continuu, omogen şi izotrop, atunci (aşa cum s-a arătat în § 1.6) mediul va avea simetria acţiunii respective.

Aşadar, pînă acum am legat simetria tensorilor de simetrie în general şi, în ultimă instanţă, de simetria figurilor geometrice. Pe lîngă aceasta, în fizica mediilor cristaline tensorii se folosesc cel mai mult pentru descrierea *proprietăţilor* cristalelor. Astfel, se introduce noţiunea de *simetrie* a acestor *proprietăţi*. Prin definiţie, *simetria oricăreia dintre proprietăţile unui cristal dat este simetria tensorului ce descrie respectiva proprietate*. Aşa, de exemplu, proprietăţile optice (refracţia luminii) ale cristalelor din sistemele cristalografice mijlocii sînt descrise de un tensor polar de ordinul doi simetric, la care găsim următoarea corelaţia între coeficienţi: $a_{11} = a_{22} \neq a_{33}$. Acest tensor are simetria ∞/mmm (simetria elipsoidului de rotaţie). În modul acesta, la cristalele din sistemele mijlocii proprietăţile optice au simetria ∞/mmm ş.a.m.d.

Dacă considerăm un mediu a cărui simetrie este determinată de simetria unei acţiuni exterioare (ca în cazul mediilor continue omogene), simetria proprietăţilor (a tensorilor corespunzători) va coincide cu simetria mediului însuşi. La o astfel de concluzie se poate ajunge dacă se ia în considerare că în acest caz acţiunea exterioară nu numai că determină simetria mediului, dar şi *„creează" o proprietate sau alta*, determină simetria respectivei proprietăţi. În particular aceasta înseamnă că simetria proprietăţilor, descrise de tensori polari de ordinul doi, coincide pentru asemenea medii cu simetria tensorilor daţi în tabelul 9 şi proprietăţile înseşi sînt descrise de tensorii respectivi. La o concluzie analogă se ajunge şi în cazul tensorilor axiali de ordinul doi (vezi tabelul 10).

În cazul mediilor ce au reţea cristalină (vezi cap. 1) simetria acţiunii exterioare este, în general, mai înaltă decît simetria pe care o capătă mediul sub influenţa acestei acţiuni. Un exemplu simplu: un cub (grupul $m3m$) capătă, sub influenţa unei acţiuni pseudoscalare (grupul $\infty/\infty 2$), simetria 432, care este mai joasă decît simetria acţiunii. Situaţii similare am

Scanned with OKEN Scanner

întîlnit în cazul fig. 36 etc. Trebuie să remarcăm, că într-o abordare a problemei ca cea de aici, pot avea loc cazuri în care simetria unui cristal să *coincidă* cu simetria acțiunii exterioare, dar niciodată nu vom întîlni cazuri în care simetria cristalului să fie *superioară* simetriei acțiunii din afară. Aceasta decurge din definiția dată aici simetriei unui mediu (cristal), și anume din ipoteza că felul acțiunii determină caracterul simetriei cristalului.

Dacă considerăm acum că simetria acțiunii exterioare este chiar simetria proprietăților cristalului, atunci simetria proprietăților va fi sau totdeauna mai înaltă decît simetria cristalelor, sau va coincide cu aceasta. La rîndul său, din faptul că simetria unui cristal este determinată de acțiunea exterioară aplicată acestuia rezultă că toate elementele de simetrie ale cristalului se vor găsi printre elementele de simetrie ale acțiunii (vezi § 1.2, principiul simetriei Curie). Cu alte cuvinte, grupul de simetrie al cristalului este un subgrup al simetriei proprietăților sale.

Concluzia referitoare la cristalografia fizică expusă în subparagraful precedent nu se demonstrează, ci este considerată un principiu denumit *principiul lui Neuman*. Conținutul acestui principiu poate fi formulat în modul următor : *toate elementele de simetrie ale unui cristal sînt conținute printre elementele de simetrie ale proprietăților sale* ; *simetria cristalului nu poate fi mai ridicată decît simetria oricărei proprietăți fizice a sa*. Principiul lui Neuman este larg folosit la alegerea claselor de cristale care pot avea unele proprietăți fizice sau altele. Această selecționare se face pe baza următoarei reguli (ce reprezintă în esență, o altă formulare a principiului lui Neuman) : *grupurile de simetrie ale cristalelor, care au o anumită proprietate fizică, pot fi sau numai subgrupuri ale grupului de simetrie al acestei proprietăți sau pot avea doar grupul de simetrie al proprietății.*

c) PROPRIETĂȚI CRISTALINE NECONDIȚIONATE DE ACȚIUNI EXTERIOARE

Cînd se studiază proprietățile unui cristal se subînțelege totdeauna reacția acestuia la acțiuni externe. De exemplu, cînd se analizează conductibilitatea electrică se are în vedere trecerea curentului electric prin cristal sub influența cîmpului electric aplicat etc. Totuși, cristalele au o serie de proprietăți care le aparțin intrinsec, independent de vreo influență din exteriorul lor. Aici ne referim, de fapt, nu la proprietăți, ci la *stările* cristalelor. Astfel, toate cristalele au masă inertă, care

Scanned with OKEN Scanner

este o mărime scalară și are simetria scalarilor. O serie de cristale au structura de așa natură încît la trecerea prin ele a unui fascicul de lumină plan-polarizată planul de polarizare se rotește. În cazul unor cristale cubice o astfel de rotație, aceeași după toate direcțiile, este descrisă de un pseudoscalar și are simetria acestuia.

Merită o atenție deosebită analiza particularităților stărilor cristalelor legate de distribuția caracteristică a sarcinilor electrice în cristale. Această distribuție poate fi adusă totdeauna la trei variante. Cea mai simplă este *distribuția centrosimetrică a sarcinilor pozitive și negative* cu condiția ca centrele de simetrie ale sarcinilor de fiecare semn să coincidă. În limitele unei celule elementare coincidența înseamnă că centrele de simetrie coincid cu centrul celulei. Cristalele care au o astfel de distribuție a sarcinilor, încît nu au direcții polare, se numesc *nepolare*. Cunoscînd faptul că distribuția sarcinilor este în acord cu simetria cristalelor se poate spune care este elementul de simetrie caracteristic cristalelor nepolare : centrul de simetrie. Această condiție este satisfăcută de 11 clase de cristale (vezi tabelul 5) : $m3m$, $m3$, $6/mmm$, $4/mmm$, mmm, $\bar{3}m$, $6/m$, $4/m$, $2/m$, $\bar{3}$, $\bar{1}$. În cadrul simetriei complete numărul de clase centrosimetrice este egal cu 24 (vezi tabelul 15).

Este, însă, mai interesantă următoarea variantă de distribuție a sarcinilor în cristale, și anume cînd *centrele de greutate ale sarcinilor de semne opuse nu coincid (polaritate) în limitele unei celule elementare și momentele electrice dipolare ale celulelor vecine, ce rezultă dintr-o astfel de distribuție, sînt paralele (univocitate)*. Ansamblul de asemenea celule elementare, care formează cristalul, face ca acesta *să apară polarizat din punct de vedere macroscopic în absența cîmpului exterior (polarizare spontană)*. Cristalele care au o astfel de distribuție a sarcinilor se numesc *polare* (fig. 50,a). Caracteristica de simetrie a cristalelor polare este exis-

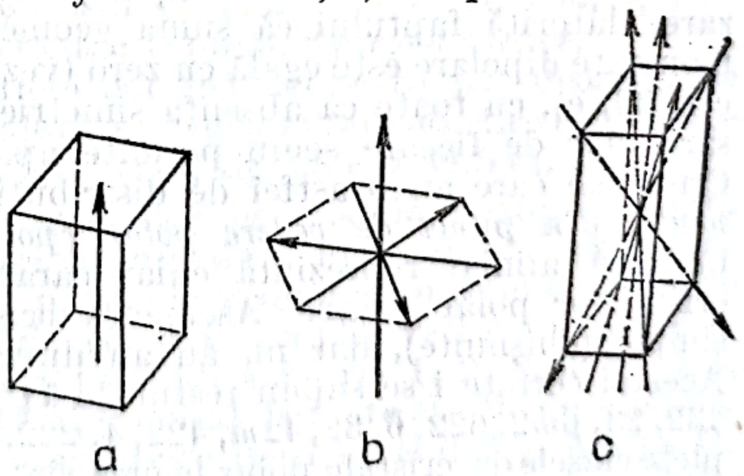


Fig. 50. Variante de distribuție ordonată a sarcinilor electrice în cristale :
a — ordonare liniară (polarizarea spontană) (grupul de simetrie $4mm$) ; b — compunerea ordonării liniare cu ordonarea în plan (grupul de simetrie $3m$) ; c — compunerea ordonării liniare cu cea volumică (grupul de simetrie $mm2$).

Scanned with OKEN Scanner

tența de direcții polare privilegiate. Simetria unor astfel de direcții este descrisă de grupurile $6mm$, $4mm$, $3m$, $mm2$, m, 6, 4, 3, 2, 1 (vezi § 1.3). Deoarece cîmpul electric de polarizare are simetria ∞mm, în concordanță cu principiul lui Neuman pot fi polarizate spontan toate cristalele ale căror grupuri de simetrie sînt subgrupuri ale acestui grup : $6mm$, $4mm$, $3m$, $mm2$, m, 6, 4, 3, 2, 1.

Adeseori cristalele aparținînd acestor clase se numesc *piroelectrice* (vezi mai departe). Exemple de cristale piroelectrice pot fi cristalele de turmalină, zahăr, sulfat de litiu ș.a. De pe pozițiile simetriei complete sînt piroelectrice cristalele care se supun ca simetrie grupului ∞/mmm, adică grupului de simetrie completă al vectorilor polari. Grupului $\infty/\underline{m}mm$ îi sînt subordonate 31 de grupuri de simetrie completă : $6/\underline{m}mm$, $\bar{6}m\underline{2}$, 6, $\underline{\bar{6}}$, $6/\underline{m}$, $6\underline{22}$, $6mm$, $4/\underline{m}mm$, 4, $\underline{\bar{4}}$, $\underline{\bar{4}2}m$, $4/\underline{m}$, $4mm$, $4\underline{22}$, $\underline{3}$, $\underline{\bar{3}}m$, $3m$, $3\underline{2}$, $\underline{m}mm$, $\underline{m}m\underline{2}$, 2, $\underline{\bar{3}}$, $mm2$, $\underline{m}$, $2/\underline{m}$, $\underline{2}/m$, $2\underline{22}$, $\underline{2}$, m, $\underline{\bar{1}}$, $\underline{1}$. Subgrupul de simetrie obișnuită cea mai înaltă al fiecăruia dintre aceste grupuri, evident, este și el prioelectric. Astfel, de exemlpu, grupul $\underline{\bar{4}2}m$ are ca subgrup grupul de simetrie obișnuită $mm2$, grupul $6\underline{22}$ — grupul 6 ș.a.m.d.

Cea de-a treia variantă de distribuție a sarcinilor este aceea în care *centrele de greutate ale sarcinilor pozitive și negative coincid, dar distribuția sarcinilor de fiecare semn nu este centrosimetrică*. În aceste condiții, în limitele unei celule elementare este posibil să existe un ansamblu de momente electrice dipolare care să nu conducă în final la apariția vreunei direcții de polarizare, datorită faptului că suma geometrică a tuturor acestor momente dipolare este egală cu zero (vezi, de exemplu, fig. 38, b, c și 39, e), cu toate că absența simetriei centrale în distribuția sarcinilor de fiecare semn permite apariția direcțiilor polare. Cristalele care au o astfel de distribuție de sarcini se numesc *neutre din punct de vedere polar (polar neutre)*. Cele spuse în acest aliniat reprezintă chiar caracteristica de simetrie a cristalelor polar neutre. Asemenea cristale au direcții polare simple (obișnuite), dar nu au au direcții polare privilegiate. Acestei cerințe i se supun restul de 11 clase de cristale : $\bar{4}3m$, 432, 23, $\bar{6}m2$, 622, $\bar{6}$, 32, $\bar{4}2m$, 422, $\bar{4}$, 222. În cadrul simetriei complete clasele de cristale polar neutre sînt descrise de 38 grupuri*.

* Aceste grupuripot fi selectate cu ajutorul fig. 35 și a tabelului 14. În particular, grupurile polar neutre, subordonate grupului $\underline{\infty}/mm\underline{m}$, pot fi găsite ca subordonate grupului $\underline{6}/mm\underline{m}$ (fig. 38, b, c), iar cele subordonate grupului $\underline{\infty}/\underline{m}m\underline{m}$ — grupului $\underline{4}/\underline{m}m\underline{m}$ (fig. 39, e).

Scanned with OKEN Scanner

La cristale poate să se realizeze încă un tip de ordonare a dipolilor, și anume o combinație a ordonării liniare cu cea plană și volumică. Grupurile de simetrie posibile care permit aceste două tipuri de ordonare simultan pot fi găsite prin superpoziția elementelor de simetrie ale celor 11 grupuri de cristale polar neutre și a grupului ∞mm, care descrie ordonarea liniară a dipolilor. Asemenea combinații conduc la grupurile 6, 4, 3, 2, 1, $3m$, $mm2$, m.

La cristalele din aceste clase este permisă ordonarea polară a dipolilor, pe lîngă cea polar neutră. Exemple de asemenea combinații au fost reprezentate în fig. 50, b, c. Interesant este că din numărul total de grupuri polare ale cristalelor numai două grupuri, $6mm$ și $4mm$ permit doar un singur tip de ordonare — cea liniară.

Analog considerării *distribuției* sarcinilor electrice ca răspunzătoare de particularitățile direcțiilor polare se pot considera particularitățile *mișcării* sarcinilor, care conduc la apariția direcțiilor axiale. De existența direcțiilor axiale sînt legate caracteristicile proprietăților magnetice ale cristalelor. Direcțiile axiale (vezi § 1.3) au simetria 1, 2, 3, 4, 6, $1/m$, $2/m$, $\bar{6}$, $4/m$, $6/m$, $\bar{1}$, $\bar{4}$, $\bar{3}$. La oricare dintre clasele de cristale este permisă de simetrie cel puțin una dintre aceste direcții (vezi tabelul 7 și Anexa I).

În cazul cel mai simplu de ordonare magnetică există în cristal o direcție axială *(privilegiată)*. Știind că magnetizarea are simetria de vector axial (grupul ∞/m), în concordanță cu principiul lui Neuman, *magnetizarea spontană* poate avea loc la următoarele 13 clase de cristale : 1, 2, 3, 4, $\bar{6}$, m, $2/m$, $\bar{6}$, $4/m$, $6/m$, $\bar{1}$, $\bar{4}$, $\bar{3}$. Asemenea cristale se numesc *piromagnetice*.

La descrierea proprietăților magnetice se pot deosebi, de asemenea, clase de cristale care au momente magnetice compensatoare (în plan sau pe volum) (vezi fig. 38,e și 39,b,c).

Analiza distribuției sarcinilor în cristale poate fi făcută de pe pozițiile existenței în cristale a unor direcții axial-tensoriale (de rotație). Din punct de vedere geometric o astfel de direcție este ilustrată de cel mai simplu vector axial (vezi fig 23, d). Direcțiile de rotație au simetria 1, 2, 3, 4, 6, 1/2, 222, 32, 422, 622 (vezi § 1.3) și există la toate clasele de cristale, cu excepția celor centrosimentrice (vezi tabelul 7 și Anexa I). Prezența direcțiilor de rotație în cristale caracterizează posibilitatea lor de a roti planul de polarizare al luminii, adică posibilitatea de a fi *optic active*. Discuția claselor de cristale ce prezintă activitate optică va fi făcută în § 3.3. Remarcăm aici doar

Scanned with OKEN Scanner

faptul că la unele cristale activitatea optică se manifestă în combinaţie cu polarizarea spontană, magnetizarea etc.

Aşadar, cristalele pot avea stări proprii esenţiale chiar şi în absenţa oricăror acţiuni din afară. În particular, pot fi polarizate spontan (cristale piroelectrice), pot fi magnetizate spontan (cristale piromagnetice). Datorită faptului că la cristalele piroelectrice poate apare polarizarea spontană (autopolarizarea, în absenţa cîmpului exterior) în tăieturi perpendiculare (sau oblice, dar un paralele) pe direcţia de polarizare spontană, în ele se pot găsi sarcini legate, iar între părţile opuse ale tăieturilor poate exista o anumită diferenţă de potenţial. Cercetătorului nu-i rămîne în acest caz decît să determine natura sarcinii create sau să măsoare diferenţa de potenţial. Analog, cristalele piromagnetice pot avea moment magnetic diferit de zero în absenţa cîmpului magnetic.

La unele cristale se observă în starea iniţială capacitatea de a roti planul de polarizare al luminii. Trecînd un fascicul de lumină printr-un astfel de cristal ne putem convinge de adevărul celor afirmate. Aşadar, din motive de simetrie, cristalelor li se pot atribui iminent, datorită structurii lor, o serie de stări: polarizare spontană, magnetizare spontană, o stare ce permite rorirea planului de polarizare ş.a.m.d.

d) FENOMENE PIROELECTRICE ŞI PIROMAGNETICE. VARIAŢIA POLARIZĂRII ŞI MAGNETIZĂRII SPONTANE ÎN CAZUL COMPRIMĂRII) DESTINDERII) UNIFORME

La cristalele care prezintă polarizare spontană $\mathbf{P}_s$ şi magnetizare spontană $\mathbf{I}_s$, valoarea absolută a lui $\mathbf{P}_s$ şi $\mathbf{I}_s$ (mai general, şi sensul acestor mărimi) se modifică atunci cînd variază temperatura cristalului. Creşterea $\Delta\mathbf{P}_s$ a polarizării spontane, proporţională cu variaţia temperaturii, se numeşte – prin definiţie — *efect piroelectric (piroefect)*

$$\Delta\mathbf{P}_s = \mathbf{p}\Delta T. \tag{3.1}$$

Mărimea $\mathbf{p}$ se numeşte coeficient piroelectric. Ambele mărimi, $\Delta\mathbf{P}_s$ şi $\mathbf{p}$, sînt vectori polari, iar creşterea temperaturii ΔT este un scalar.

La rîndul său, în cazul piromagnetismului avem

$$\Delta\mathbf{I}_s = \mathbf{k}\Delta T \tag{3.2}$$

unde $\mathbf{k}$ este coeficientul piromagnetic. Deoarece temperatura este o mărime scalară, $\mathbf{k}$ este din punct de vedere al simetriei (ca şi $\Delta\mathbf{I}$) un vector axial.

Scanned with OKEN Scanner

Clasele de cristale piroelectrice (cristale cu direcţii polare privilegiate, sînt : 6, 4, 3, 2, 1, $6mm$, $4mm$, $3m$, $mm2$, m. Încălzirea uniformă, ca acţiune scalară de cea mai înaltă simetrie (grupul $\infty/\infty/mmm$) nu modifică simetria cristalului *. Din cele 10 clase de cristale piroelectrice, la opt direcţia polarizării spontane nu-şi modifică orientarea în spaţiu cu variaţia temperaturii. La cristalele clasei m polarizarea spontană se observă în planul de simetrie, iar atunci cînd variază temperatura direcţia ei se poate roti în acest plan. La cristalele din clasa 1 capătul vectorului polarizare spontană poate descrie o curbă oarecare atunci cînd variază temperatura.

La clasele piromagnetice (clasele 1, 2, 3, 4, 6, m, $2/m$, $\bar{6}$, $4/m$, $6/m$, $\bar{1}$, $\bar{4}$, $\bar{3}$) direcţia magnetizării spontane este fixă în toate clasele, cu excepţia claselor $\bar{1}$ şi 1. În ambele aceste cazuri, atunci cînd variază temperatura direcţia magnetizării spontane îşi modifică poziţia într-un mod arbitrar.

Efectul piroelectric este destul de esenţial la segnetoelectrici (vezi cap. 4); aici el este bine studiat şi cu o utilizare practică destul de largă. Valoarea absolută a coeficientului **p** la segnetoelectrici reprezintă în domeniul tranziţiilor de fază sute (sare Seignette), mii (KH_2PO_4) şi chiar zeci de mii ($BaTiO_3$) unităţi electrostatice. La dielectricii liniari piroefectul este, de asemenea, bine studiat şi are aplicaţii. De exemplu, la turmalină valoarea absolută a coeficientului **p** este de o unitate electrostatică.

În fizica mediilor cristaline se studiază şi fenomenul invers efectului piroelectric. Acest fenomen se numeşte *efect electrocaloric* şi constă în variaţia temperaturii cristalului atunci cînd se schimbă polarizarea sa spontană. Totuşi, efectul electrocaloric nu este descris cu ajutorul mărimii $\Delta \mathbf{P}_s$, ci cu ajutorul intensităţii cîmpului electric, $\Delta \mathbf{E}$, aplicat cristalului în scopul modificării polarizării sale spontane şi, în ultimă instanţă, a temperaturii

$$\Delta T = \mathbf{q} \Delta \mathbf{E}. \tag{3.3}$$

Mărimea **q** se numeşte coeficient al efectului electrocaloric şi este vector polar. Sensul vectorului **q** poate fie să coincidă cu sensul vectorului $\Delta \mathbf{E}$, fie să aibă orientare opusă. Dacă se consideră că vectorii $\Delta \mathbf{E}$ şi $\mathbf{P}_s$ coincid ca sens, atunci şi vectorul **q**

* Tranziţiile de fază posibile în cristale sub acţiunea temperaturii vor fi analizate în capitolul 4.

va avea același sens ca și $\mathbf{P}_s$ dacă cîmpul aplicat face să crească temperatura cristalului. Dacă, însă, cîmpul aplicat face să scadă temperatura cristalului ($\Delta T < 0$), atunci vectorul $\mathbf{q}$ va fi orientat în sens opus vectorului $\mathbf{P}_s$. Valoarea absolută a lui $\mathbf{q}$ pentru segnetoelectrici reprezintă 1,5—0,5 unități electrostatice.

Piromagnetismul ca fenomen special este luat în considerație destul de rar, deși efectele legate de variația magnetizării spontane în domeniul temperaturii tranzițiilor de fază din substanțele feromagnetice (adică, de fapt, legate de piromagnetism) sînt studiate destul de complet.

Comprimarea sau destinderea uniformă (de exemplu, hidrostatică), ca și temperatura, sînt acțiuni scalare. Ele nu conduc la modificarea simetriei cristalului *, dar provoacă în cristalele piroelectrice și piromagnetice variația polarizării spontane $\mathbf{P}_s$ și a magnetizării $\mathbf{I}_s$ respectiv. Ecuația polarizării în cazul comprimării uniforme, pentru piroelectrici de exemplu, poate fi scrisă sub forma

$$\Delta \mathbf{P}_s = \mathbf{m} p \qquad (3.4)$$

unde $\mathbf{m}$ este coeficientul de polarizare la comprimare hidrostatică sau destindere (vector polar), iar p o mărime ce caracterizează comprimarea hidrostatică. Caracteristicile polarizării și magnetizării la comprimare (destindere) hidrostatică sînt analoge celor care au fost menționate mai înainte pentru piroefect și piromagnetism. Variația polarizării spontane și a magnetizării spontane în cazul comprimării uniforme se tratează drept cazuri particulare ale piezoefectului și piezomagnetismului respectiv (vezi § 3.4).

3.2. TENSORII POLARI DE ORDINUL DOI ÎN FIZICA MEDIILOR CRISTALINE

Tensorii polari de ordinul doi sînt folosiți pentru descrierea *acțiunilor exterioare* asupra cristalelor și pentru descrierea *proprietăților* cristalelor. Aici avem de-a face cu o analogie completă cu vectorii. Astfel, vectorii polari, de exemplu, sînt folosiți pentru descrierea cîmpului electric care polarizează un cristal, precum și pentru descrierea piroefectului. Tensorii *tensiunilor* și *deformațiilor* descriu acțiuni exterioare determinate de influența unor forțe externe asupra cristalului, iar tensorii

* Tranzițiile de fază la variația presiunii nu vor fi analizate aici.

Scanned with OKEN Scanner

dilatării termice, permitivității dielectrice, conductivității electrice și altele — proprietățile cristalului. Pe lîngă generalitatea lor, tensorii de ambele tipuri sînt și foarte deosebiți. Astfel, simetria tensorilor corespunzători proprietăților cristalului — tensori ce descriu fenomenele care determină simetria și structura cristalului — este în concordanță cu simetria cristalului. Simetria tensorilor determinați de acțiunile exterioare nu concordă cu simetria cristalului. Cu alte cuvinte, tensorilor de proprietăți ale cristalului li se aplică principiul lui Neuman, în timp ce cu simetria acțiunilor exterioare acest principiu nu are deloc de-a face.

Uneori tensorii care descriu acțiuni exterioare (cîmpul electric și magnetic, tensiunile și altele) se numesc *de cîmp*. Simetria citorva asemenea cîmpuri a fost lămurită în paragraful precedent. Aici vom analiza doar simetria a doi tensori de cîmp de ordinul doi — tensorul tensiunilor și tensorul deformațiilor.

Pentru studiul tensorilor de cîmp și al tensorilor care descriu proprietățile cristalelor vor fi folosite rezultatele obținute în capitolele 1 și 2. Aici nu se pune problema de a analiza toate proprietățile descrise de tensorii de ordinul doi. În studiul tensorilor de proprietăți principala atenție se va acorda concretizării caracteristicilor de simetrie și fizice ale unui număr nu prea mare dintre cele mai importante proprietăți *.

a) TENSORUL TENSIUNILOR

În cazurile cînd un cristal are capacitatea de a se deforma, sub acțiunea unor forțe exterioare, în el apare o stare de tensiune. Cel mai simplu exemplu este dilatarea termică a unei plăcuțe cristaline, a cărei deformație este limitată de cauze exterioare. Prin definiție, se numește *tensiune t* forța aplicată pe suprafața ΔS a cristalului

$$t = F/\Delta S. \tag{3.5}$$

Cu anumite limitări, tensorul tensiunilor poate fi considerat tensor polar simetric de ordinul doi. Acest tensor leagă doi vec-

---

* O analiză completă a proprietăților cristalelor este dată în cărțile: Ny, J. *Proprietățile fizice ale cristalelor și descrierea lor cu ajutorul tensorilor și a matricelor*, Mir, Moscova, 1967 (traducere din l. engleză); Bhagavantam, *Crystal Simmetry and Physical Properties*, Academic Press, 1966; Jeludev, I. S., *Fizica dielectricilor cristalini*, Nauka, Moscova, 1968; Wooster, W. A., *Text-book on Crystal Physics*, Cambridge, 1949.

Scanned with OKEN Scanner

tori polari—vectorul forţă **F** care acţionează asupra cristalului şi vectorului unitate al normalei la suprafaţa considerată **l**, a cărui valoare absolută este egală cu unitatea de suprafaţă

$$\mathbf{F} = [t]\mathbf{l}\,;\; F_i = t_{ij}l_j. \tag{3.6}$$

În cazul general, pentru un cub decupat dintr-un cristal, cu muchiile paralele la axele unui sistem de coordonate X, Y, Z, forţele care acţionează asupra feţelor pot fi descompuse în componente după axele sistemului şi scrise sub forma t_{ij}, unde primul indice indică numărul axei în direcţia căreia sînt orientate componentele forţei, iar al doilea — numărul axei pe care este perpendicuară faţa considerată (fig. 51). Aici vom analiza numai starea de tensiune uniformă: toate feţele orientate la fel în cristal au aceeaşi tensiune.

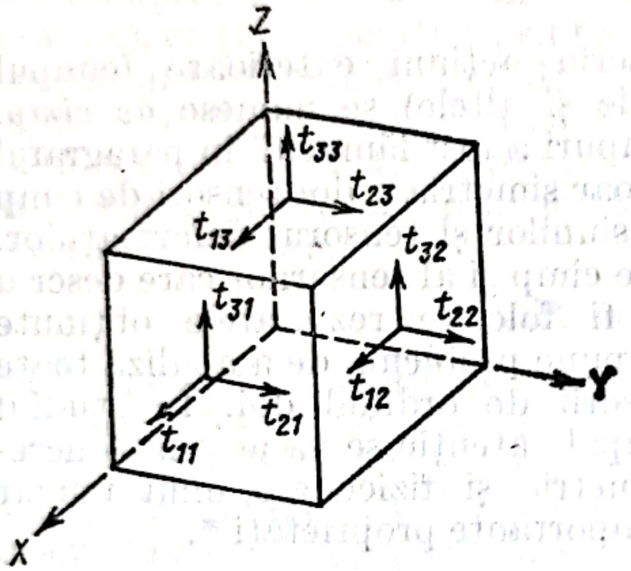


Fig. 51. Forţele care acţionează asupra feţelor unui cub unitar într-un cîmp de tensiuni.

Sistemul principal de coordonate al tensorului tensiunilor poate fi orientat arbitrar în raport cu sistemul de coordonate cristalografic, a cărei alegere a fost indicată în tabelul 6.

În sistemul principal de coordonate tensorul $[t]$ are forma

$$\begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} & t_{13} \\ t_{21} & t_{22} & t_{23} \\ t_{31} & t_{32} & t_{33} \end{bmatrix}. \tag{3.7}$$

Componentele t_{ii} ale acestui tensor se numesc *tensiuni normale*, iar componentele t_{ij} $(i \neq j)$ — *tensiuni tangenţiale* (*de deplasare*). În sistemul principal de coordonate al tensorului (3.7) tensiunile tangenţiale lipsesc

$$\begin{bmatrix} t_1 & 0 & 0 \\ 0 & t_2 & 0 \\ 0 & 0 & t_3 \end{bmatrix} \tag{3.8}$$

iar componentele t_1, t_2 şi t_3 se numesc *tensiuni principale*.

Scanned with OKEN Scanner

Folosind tabelul 9 se pot scrie celelalte forme ale tensorilor tensiunilor și indica simetria lor. Asemenea tensori nu au componente antisimetrice și în sistemul principal de coordonate, în completare la tensorul (3.8), ei au fie coeficienții $t_1 = t_2 = t_3$, fie coeficienții $t_1 = t_2 \neq t_3$. Primul dintre acești tensori are simetria scalarului (grupul $\infty/\infty/mmm$), cel de-al doilea — simetria elipsoidului de rotație (grupul ∞/mmm), iar tensorul (3.8) — al elipsoidului triaxial (grupul mmm).

Reprezintă interes analiza cîtorva forme particulare ale tensorului tensiunilor; astfel, tensorul

$$\begin{bmatrix} t_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{3.9}$$

descrie o tensiune uniaxială și are simetria ∞/mmm.

Tensorul

$$\begin{bmatrix} t_1 & 0 & 0 \\ 0 & t & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{3.10}$$

descrie o stare de tensiune dată într-un plan; simetria lui este mmm.

Tensorul

$$\begin{bmatrix} t_1 & 0 & 0 \\ 0 & -t_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{3.11}$$

descrie un caz particular de stare de tensiune în plan — *tensiunea de deplasare pură*. Un pătrat decupat din planul XY, cu laturile perpendiculare pe axele X și Y, are numai componente normale ale tensiunii, iar un pătrat cu laturile formînd unghiurile de 45° cu axele X și Y — numai tensiuni de deplasare. Aceasta rezultă din faptul că tensorul (3.11), fiind rotit în jurul axei X_3 cu un unghi de 45°, are forma

$$\begin{bmatrix} 0 & t_{12} & 0 \\ t_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{3.12}$$

Scanned with OKEN Scanner

Un cîmp uniform de tensiuni poate fi condiţionat de un sistem compus de forţe şi este descris nu neapărat de un tensor simetric. Această simetrizare are loc, totuşi, numai dacă toate părţile cristalului se află în echilibru static şi nu există momente volumice. Momentele volumice pot fi induse atît de un cîmp de momente mecanice (cîmp de cupluri de forţe; vezi fig. 44, a) cît şi de cîmpurile electric şi magnetic. Sub influenţa ultimelor două cîmpuri (chiar dacă sînt uniforme), cristalul — ca corp anizotrop din punct de vedere al proprietăţilor electrice şi magnetice — poate să se rotească. Mai departe, mişcării particulelor încărcate ale cristalului în cîmp magnetic îi corespunde un moment mecanic.

În legătură cu ultima observaţie trebuie să tragem atenţia că tensiunile exterioare, descrise de un tensor simetric, în general nu creează totdeauna în cristal o stare de tensiune, descrisă tot de un tensor simetric. Această observaţie e valabilă în cazul acelor clase de cristale la care este permisă, din punct de vedere al simetriei, componenta axial-vectorială. Cu alte cuvinte, observaţia se referă la clasele de cristale subordonate din punct de vedere al simetriei grupului vectorului axial ∞/m, adică la cristalele celor 13 clase piromagnetice: $6/m$, $4/m$, $2/m$, m, $\bar{6}$, $\bar{4}$, $\bar{3}$, $\bar{1}$, 6, 4, 3, 2, 1.

În direcţia axei principale de simetrie a fiecăreia dintre aceste clase (în clasa m, axa principală este perpendiculară pe planul de simetrie) este permisă orientarea momentului magnetic propriu (spontan). Corelînd momentele mecanice date cu asemenea momente magnetice ne putem reprezenta starea de tensiune a cristalului, care va fi descrisă de un tensor nesimetric, chiar atunci cînd acţiunea exterioară este descrisă de un tensor simetric.

În legătură cu discutarea problemei simetrizării tensorilor tensiunilor şi deformaţiilor în cristale (care continuă să apară din cînd în cînd), atragem atenţia asupra încă unui fapt. Este vorba despre faptul că, sub influenţa acţiunilor exterioare, simetria cristalelor se poate schimba. Şi în cîmpul tensiunilor exterioare simetria unui cristal trebuie să poată fi stabilită pe baza principiului simetriei Curie. În acest caz se poate întîmpla ca noul grup de simetrie să fie un subgrup al grupului ∞/m, adică unul dintre grupurile piromagnetice. Aici, ca rezultat al piezomagnetismului (vezi § 3.4), în cristal poate apare un moment magnetic. Starea de tensiune a cristalului poate fi descrisă şi în acest caz de un tensor polar nesimetric.

Scanned with OKEN Scanner

Desigur, momentele datorite magnetismului spontan sau piezomagnetismului sînt mici și nu sînt în stare să rotească cristalul, dar ele pot, totuși, să modifice starea de tensiune a acestuia. Asemenea momente pot fi compensate de un moment magnetic extern realizat prin aplicarea unui cîmp magnetic egal cu cîmpul cristalului, dar de sens opus. În acest caz, tensiunile interne din cristal vor fi descrise de un tensor simetric, iar cele externe de un tensor nesimetric de formă generală.

În sfîrșit, vom observa că momentul magnetic propriu al unui cristal este de ordin mai mare decît cel indus, piezomagnetic. În consecință, în același raport trebuie să se afle și „nesimetricitățile" tensorilor tensiunilor pentru asemenea cazuri. În particular, de aici rezultă că abaterile de la simetrie ale tensorilor tensiunilor în cazul cînd se descriu alte proprietăți (de exemplu, elastice, piezoelectrice ș.a.) pot fi mai mult sau mai puțin însemnate numai pentru cristalele piromagnetice.

b) TENSORUL DEFORMAȚIILOR

Sub acțiunea forțelor exterioare un cristal, aflat în stare liberă, se deformează. *Deformația se numește uniformă* dacă o dreaptă se transformă în dreaptă, un plan — în plan, o sferă — în sferă sau elipsoid ș.a.m.d. În absența momentelor volumice deformația (ca și tensiunea) este descrisă de un tensor simetric de ordinul doi. Tensorul deformațiilor este, de asemenea, un tensor *de cîmp*; orientarea elementelor sale de simetrie nu depinde de orientarea elementelor de simetrie ale cristalului.

Tensorul deformațiilor $[r_{ij}]$ leagă doi vectori polari [vectorul de poziție unitate al unui punct din cristal pînă la deformație $\mathbf{Q}$ și raza vectoare a acestui punct după deformație $\mathbf{P}$ (fig. 52)]

$$\mathbf{P} = [r]\,\mathbf{Q} \qquad (3.13)$$

$$P_i = r_{ij}Q.$$

Coeficienții tensorului $[r]$ se numesc *deformații*. În sistemul principal de coordonate, tensorul $[r]$ are forma

$$\begin{bmatrix} r_1 & 0 & 0 \\ 0 & r_2 & 0 \\ 0 & 0 & r_3 \end{bmatrix}. \qquad (3.14)$$

Scanned with OKEN Scanner

Mărimile r_i se numesc *deformaţii principale*. Simetria unui astfel de tensor (vezi tabelul 9) este descrisă de grupul *mmm*. În cazul în care pe diagonala tensorului (3.14) toate mărimile sînt

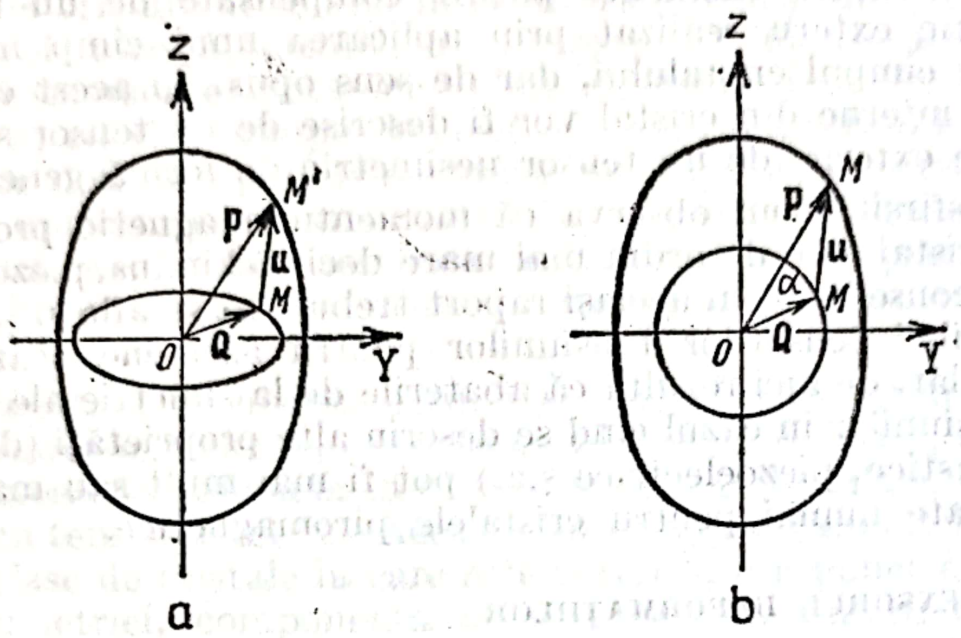


Fig. 52. Deformaţie omogenă tridimensională descrisă de deformaţiile principale e_1, e_2, e_3:

a—elipsoizii determinaţ de ecuaţiile: $(\sqrt{r_1})^2 x^2+(\sqrt{r_1})^2 y^2+(\sqrt{r_3})z^2 = 1$ şi $(1/\sqrt{r_1})^2 x^2+(1/\sqrt{r_1})^2 y^2+(1/\sqrt{r_3})^2 z^2 = 1$ şi găsirea cu ajutorul lor a direcţiei şi mărimii deplasării punctului M în poziţia M' (vectorul **u**, transformarea vectorului **Q** în vectorul **P**). Vectorul **P** este perpedicular pe planul care intersectează elipsoidul interior în punctul M; b — aflarea deplasării punctului M, aflat pe sferă unitară, cunoscînd rezultatul obţinut cu graficul a.

egale ($r_1 = r_2 = r_3$), deformaţia are simetrie de scalar, iar în cazul cînd sînt egale numai două dintre ele ($r_1 = r_2 \neq r_3$) — simetria elipsoidului de rotaţie.

După cum se vede în fig. 52, a, deformaţiile principale r_1, r_2, r_3 caracterizează alungirea realtivă a cristalului după axele principale ale tensorului $r_i = P_i/Q_i$. Vectorii **P** şi **Q** coincid după aceste direcţii. Cînd se studiază transformarea unei sfere unitate în elipsoid se pot folosi rezultate din fig. 52, a. Transformarea punctului M al sferei în punctul M' (vectorul **u**) al elipsoidului poate fi reprezentată ca o rotaţie a vectorului **Q**, de un unghi α oarecare, pînă ce coincide cu vectorul **P**, urmată de o alungire (fig. 52, b). Vectorul **u**, ce caracterizează deplasarea punctului, poate fi descompus în cele două componente — r_N şi $r_{T'}$, prima caracterizînd componenta normală a deformaţiei, iar cea de-a doua — componenta tangenţială (de deplasare) a deformaţiei. Din fig. 52, b se vede că componenta tangenţială $r_T = OM \sin \alpha$ şi — avînd în vedere că $OM = 1$ şi că la un-

Scanned with OKEN Scanner

ghiuri mici sin $\alpha = \alpha$ — obţinem

$$r_T = \alpha, \tag{3.15}$$

cu alte cuvinte componenta tangenţială în punctul dat este egală cu unghiul de rotaţie al razei vectoare din poziţia corespunzătoare punctului M în poziţia deplasată M'.

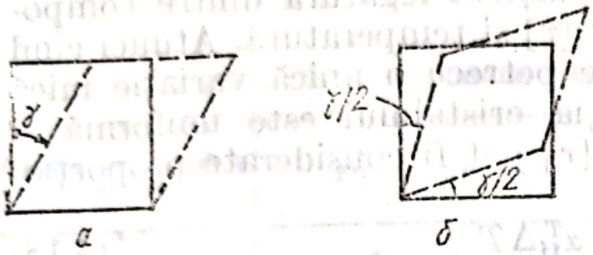


Fig. 53. Deplasarea simplă (a) corespunzătoare deplasării simple cu rotaţie de unghi $\gamma/2$ (b).

Formele speciale ale tensorului deformaţiilor sînt analoge cu formele tensorului tensiunilor, analizate în paragraful precedent (întindere-compresiune uniaxială, deplasare pură etc.). Uneori deplasarea este caracterizată nu de unghiurile $r_{ij}(i \neq j)$ considerate aici, ci de unghiul γ corespunzător deformaţiei numite de *deplasare simplă* (fig. 53,a). În esenţă deplasarea simplă este identică cu deplasarea *pură*, dar include şi o rotaţie cu unghiul $\gamma/2$ (fig. 53, b). Nu este greu de văzut că între componentele de deplasare ale tensorului r_{ij} şi unghiul γ_{ij} există legătura

$$r_{ij} = \gamma/2. \tag{3.16}$$

Destinderea volumică Δ prin deformaţie (pe unitatea de volum) este definită de expresia

$$\Delta = (1 + r_1).(1 + r_2).(1 + r_3) - 1 = r_1 + r_2 + r_3 \tag{3.17}$$

în aproximaţia de ordinul întîi. În cazul deformaţiei de deplasare pură, destinderea volumică — după cum se vede uşor — este egală cu zero.

Problema simetrizării (mai precis, a abaterilor de la simetrie) tensorului deformaţiilor este complet analogă problemei corespunzătoare pentru tensorul tensiunilor, analizată în paragraful precedent.

c) DILATAREA TERMICĂ

Într-un cîmp termic uniform, cristalele suferă o deformaţie numită *dilatare termică*. Această dilatare este un caz particular de deformaţie a cristalelor. Întrucît ea se produce sub influenţa unei acţiuni scalare, are simetria cristalului. Dilatarea termică (ca orice deformaţie) este descrisă de un vector polar

simetric de ordinul doi $[r_{ij}]$, care leagă cei doi vectori polari **P** și **Q** (vezi fig. 52)

$$P_i = r_{ij}Q_j. \qquad (3.13\ a)$$

Ecuația (3.13 a) descrie deformația cristalului, apărută sub influența forțelor exterioare, în cazul general. Pentru cazul dilatării termice trebuie să cunoaștem legătura dintre componentele tensorului deformațiilor $[r]$ și temperatură. Atunci cînd în întreg volumul cristalului se petrece o unică variație mică de temperatură ΔT, deformația cristalului este uniformă și toate componentele tensorului $[r]$ pot fi considerate proporționale cu ΔT, adică

$$r_{ij} = \alpha_{ij}^T \Delta T \qquad (3.18)$$

unde α_{ij}^T sînt constante denumite *coeficienți de dilatare termică* Tensorul $[\alpha^T]$ se numește *tensorul dilatării temice.* Acest tensor reprezintă primul exemplu de tensor de ordinul doi ce descrie *o proprietate* a cristalelor.

Tensorii dilatării termice pot fi ușor determinați, pentru toate clasele de cristale, cu ajutorul tabelului 9. Pentru aceasta trebuie să ținem seama că niciunul dintre coeficienții principali, care reprezintă partea simetrică, nu poate fi egal cu zero. Mai departe, considerînd tensorul dilatării termice simetric, trebuie că amintim că nu luăm în considerare fenomene condiționate de prezența claselor de simetrie corespunzătoare momentelor magnetice ale cristalelor — adică fenomenele de piezomagnetism și piromagnetism (vezi punctul a) din acest paragraf).

Tensorii formați conform acestor observații sînt dați în tabelul 16, pentru toate clasele de cristale*. În tabel sînt indicate, de asemenea, simetria dilatării termice pentru diferite sisteme de cristale (adică simetria tensorului care descrie dilatarea termică) și numărul de coeficienți independenți ai tensorului. În unele cazuri, numărul de coeficienți independenți ai tensorului polar simetric întrece cifra 3, în tabel. Aceasta se datorește faptului că aici este vorba nu despre simetria proprie *a tensorului* (ca în cap. 1 și 2) ci despre simetria *unui fenomen* concret. Întrucît sistemul principal de coordonate al tensorului nu poate fi găsit (fixat) — în cazul claselor indicate —, pe baza simetriei. cristalului, pentru determinarea lui completă trebuie uneori să cunoaștem patru sau chiar șase mărimi.

* Tensorii din tabelul 16 pot fi obținuți și prin impunerea unor limitări asupra coeficienților lor, limitări datorite prezenței unui element de simetrie sau altuia în clasele respective de cristale (vezi, de asemenea, § 1.4 și § 3.3, a).

Scanned with OKEN Scanner

Din tabelul 16 se vede că descrierea dilatării termice la cristalele cubice și din sistemele mijlocii de simetrie nu prezintă dificultăți. O sferă decupată dintr-un cristal cubic își păstrează forma în urma dilatării termice ($\alpha_{11}^T = \alpha_{22}^T = \alpha_{33}^T$); în acest caz, fenomenul de dilatare termică are simetrie de scalar

Tabelul 16

Tensorii dilatării termice ai cristalelor

Sistemul de simetrie a cristalelor	Forma tensorului	Simetria tensorului care descrie fenomenul	Numărul de coeficienți independenți
Cubic	$\begin{matrix} \alpha_{11}^T & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_{11}^T & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_{11}^T \end{matrix}$	$\infty/\infty/mmm$	1
Hexagonal, romboedric, tetragonal	$\begin{matrix} \alpha_{11}^T & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_{11}^T & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_{33}^T \end{matrix}$	∞/mmm	2
Rombic	$\begin{matrix} \alpha_{11}^T & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_{22}^T & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_{33}^T \end{matrix}$	mmm	3
Monoclinic	$\begin{matrix} \alpha_{11}^T & \alpha_{12}^T & 0 \\ \alpha_{12}^T & \alpha_{22}^T & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_{33}^T \end{matrix}$	$2/m$	4
Triclinic	$\begin{matrix} \alpha_{11}^T & \alpha_{12}^T & \alpha_{13}^T \\ \alpha_{12}^T & \alpha_{22}^T & \alpha_{23}^T \\ \alpha_{13}^T & \alpha_{23}^T & \alpha_{33}^T \end{matrix}$	$\bar{1}$	6

($\infty/\infty/mmm$). La cristalele din sistemele medii, sfera decupată se transformă prin încălzire în elipsoid de rotație ($\alpha_{11}^T = \alpha_{22}^T, \alpha_{33}^T$; fig. 54, a). O sferă decuplată dintr-un cristal al sistemului rombic se transformă, prin înălzire, în elipsoid triaxial (α_{11}^T, α_{22}^T, α_{33}^T), care își conservă orientarea la orice tempeatură.

Fenomenul de dilatare termică este mai complicat în cazul cristalelor monoclinice și triclinice. La astfel de cristale siste-

Scanned with OKEN Scanner

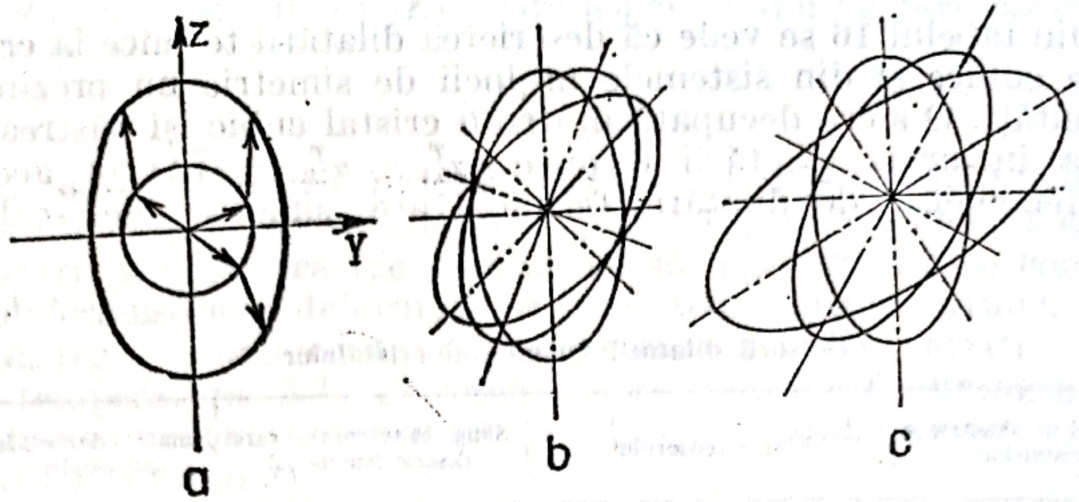


Fig. 54. Particularităţile dilatării termice a cristalelor:
a — la cristalele uniaxe sfera se transformă în elipsoid de rotaţie (secţiune); simetria fenomenului este ∞/mmm; b — la cristalele monoclinice elipsoidul rezultat prin dilatare se şi roteşte în jurul axei 2 sau a perpendicularei pe planul de simetrie (secţiune); simetria fenomenului $2/m$; c — la cristalele triclinice poziţia elipsoidului de rotaţie nu este fixă (secţiune); simetria $\bar{1}$.

mul principal de coordonate al tensorului dilatării termice nu poate fi complet fixat şi prin încălzirea cristalului el se va roti totdeauna. La cristalele sistemului monoclinic, în virtutea faptului că există o direcţie separată (axa 2 sau perpendiculara pe planul m), rotaţia se va produce în jurul acestei direcţii. La cristalele sistemului triclinic toate axele sistemului principal de coordonate îşi modifică continuu poziţia cînd se încălzeşte cristalul, ceea ce poate fi interpretat ca o rotaţie în jurul unei axe instantanee, care îşi schimbă tot timpul poziţia (fig. 54, c).

La toate cristalele, cu excepţia celor cubice, coeficienţii α_{11}^T, α_{22}^T, α_{33}^T pot avea atît semne identice, cît şi semne diferite. Astfel, la calcit, de exemplu, coeficienţii $\alpha_{11}^T = \alpha_{22}^T$ sînt negativi (comprimarea la încălzire), iar coeficientul α_{33}^T este pozitiv.

La cristalele din sistemele medii şi inferioare vectorii **P** şi **Q** coincid doar în direcţia axelor principale, şi valoarea *coeficientului de dilatare termică după o direcţie dată* poate fi determinată. În orice altă direcţie coeficientul de dilatare termică poate fi determinat ca raportul dintre proiecţia vectorului **P** pe direcţia vectorului **Q** şi modulul vectorului **Q** şi rezultă din expresia*.

$$\alpha^T = \alpha_{11}^T c_1 + \alpha_{22}^T c_2 + \alpha_{33}^T c_3 \qquad (3.19)$$

în care c_1, c_2, c_3 sînt cosinuşii directori ai vectorului **Q**. Mărimea α, pornind dintr-un punct oarecare în toate direcţiile, des-

* Vezi, de exemp,u: J e l u d e v, I. S., *Elipsoizii dielectrici şi caracteristicile permitivităţii dielectrice*, Kristalografia, 1, 105, 1956.

Scanned with OKEN Scanner

crie o suprafaţă care se numeşte deobicei *caracteristica coeficienţilor de dilatare termică*. În funcţie de valoarea şi semnul coeficienţilor α_{11}^T, α_{22}^T, şi α_{33}^T înfăşurătoarea are diferite forme. Unele dintre ele sînt reprezentate în fig. 55.

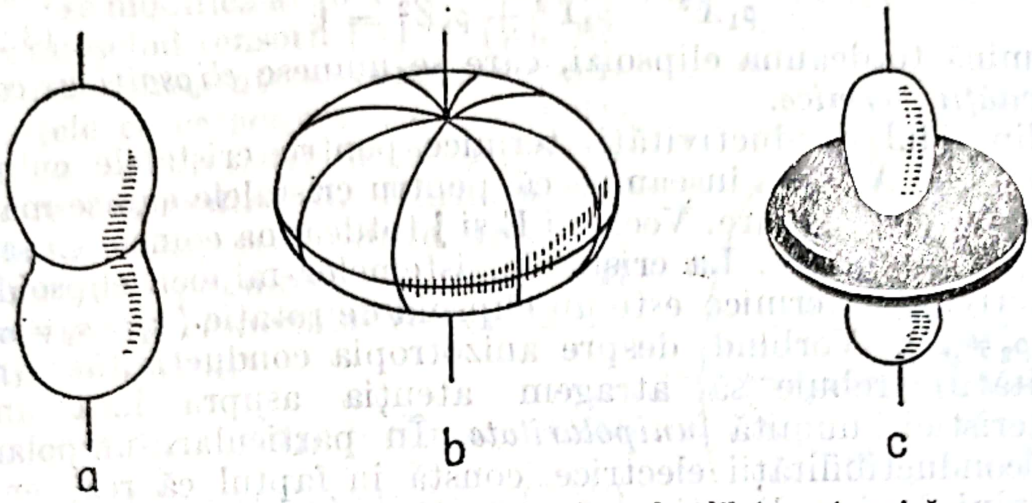


Fig. 55. Suprafeţele coeficienţilor de dilatare termică :
a) $\alpha_{11}=\alpha_{22}\neq\alpha_{33}$, $\alpha_{33}>\alpha_{11}$; b) $\alpha_{11}=\alpha_{22}\neq\alpha_{33}$, $\alpha_{33}<\alpha_{11}$; c) $\alpha_{11}=\alpha_{22}\neq\alpha_{33}$, $\alpha_{33}>0$, $\alpha_{11}<0$.

d) CONDUCTIBILITATEA ELECTRICĂ

Proprietatea cristalelor de a transporta particule încărcate electric sub influenţa unui cîmp electric exterior se numeşte conductibilitate electrică. Expresiile analitice care descriu conductibilitatea electrică stabilesc legătura dintre intensitatea cîmpului electric **E** şi densitatea de curent **j**

$$j_i = \sigma_{ik} E_k. \tag{3.20}$$

Tensorul conductivităţii electrice specifice $[\sigma]$, ca mărime ce leagă doi vectori polari, este un tensor polar de ordinul doi. Coeficienţii σ_{ik} se numesc *coeficienţi de conductivitate electrică specifică*. Inversul tensorului $[\sigma]^{-1}$ reprezintă *tensorul rezistivităţii electrice specifice*

$$E_i = \rho_{ik} j_k. \tag{3.21}$$

Datorită dependenţei tensoriale dintre vectorii **j** şi **E**, aceştia nu coincid ca sens în cazul general. Pentru a da o interpretare geometrică, intuitivă, a legăturii dintre vectorii **j** şi **E**, descrisă de ecuaţia (3.20), vom considera că tensorul $[\sigma]$ este simetric. Coeficienţii principali de conductivitate electrică specifică σ_1, σ_2 şi σ_3, ca şi coeficienţii ρ_1, ρ_2, ρ_3, vor fi totdeauna

Scanned with OKEN Scanner

pozitivi şi totdeauna diferiţi de zero. Aceasta înseamnă că ecuaţiile suprafeţelor, cu ajutorul cărora pot fi interpretaţi tensorii simetrici consideraţi*

$$\sigma_1 X^2 + \sigma_2 Y^2 + \sigma_3 Z^2 = 1 \qquad (3.22)$$

$$\rho_1 X^2 + \rho_2 Y^2 + \rho_3 Z^2 = 1 \qquad (3.23)$$

determină totdeauna elipsoizi, care se numesc *elipsoizi ai conductivităţii termice.*

Elipsoidul conductivităţii termice pentru cristalele cubice este o sferă. Aceasta înseamnă că pentru cristalele cubice mărimile σ şi ρ sînt scalare. Vectorii **E** şi **j** totdeauna coincid ca sens în astfel de cristale. La cristalele sistemelor mijlocii elipsoidul conductivităţii termice este un elipsoid de rotaţie ($\sigma_1 = \sigma_2 \neq \sigma_3$; $\rho_1 = \rho_2 \neq \rho_3$). Vorbind despre anizotropia conductivităţii (rezistivităţii) trebuie să atragem atenţia asupra încă unei caracteristici, numită *unipolaritate.* În particular, unipolaritatea conductibilităţii electrice constă în faptul că rezistenţa cristalului după o direcţie oarecare „înainte" şi „înapoi" poate fi diferită. Astfel, în cristalele sulfatului de litiu ($Li_2SO_4 \cdot H_2O$) schimbarea sensului cîmpului în direcţia axei 2 (direcţie polară privilegiată) conduce la modificarea valorii mărimii de măsurat cu aproximativ 10 %**.

Ilustrarea legăturii dintre vectorii **E** şi **j**, determinată de ecuaţiile (3.22) şi (3.23), pentru cazul unui cristal uniax, este dată în fig. 56. Construcţii similare ne permit să determinăm pentru fiecare tip de cristal, avînd dat unul dintre vectori — valoarea şi orientarea celuilalt.

La cristalele din sistemele de simetrie joasă elipsoizii conductivităţii termice sînt triaxiali. La sistemul rombic, poziţia acestor elipsoizi este fixată, axele lor principale coincid cu sistemul de coordonate cristalografice al cristalului. La cristalele monoclinice este fixată poziţia doar a uneia dintre axele elipsoidului, cea care coincide cu axa Y a sistemului de coordonate cristalografice*** (vezi tabelul 6). Sistemele triclinice nu au (şi

---

* Asemenea suprafeţe se numesc uneori caracteristice (vezi, de exemplu, Jeludev, I. S., lucrarea citată la p. 140).

** Gurevici, V. M., Jeludev, I. S., *Anizotropia conductibilităţii electrice a monocristalului de sulfat de litiu*, Kristalografia, **5**, 805, 1960.

* În tabelele de tensori de ordinul doi (vezi tabelele 9, 10 şi celelalte) s-a considerat că axa 2 şi perpendiculara pe planul de simetrie m coincid cu axa Z a sistemului principal de coordonate. În legătură cu aceasta, abătîndu-ne de la cerinţele tabelului 6, mai departe vom considera la cristalele sistemului monoclinic în tensorul proprietăţilor că axa 2 şi perpendiculara pe planul de simetrie coincid cu axa Z a sistemului de coordonate cristalografic.

Scanned with OKEN Scanner

nici nu pot avea) o legătură univocă între sistemul principal de coordonate al elipsoidului electroconductivității și sistemul de coordonate cristalografice al cristalului. Orientarea elipsoidului conductivității electrice la cristalele monoclinice și triclinice se modifică atunci cînd variază temperatura (vezi fig. 54).

Cunoscînd tensorii $[\sigma]$ și $[\rho]$, nu prezintă dificultate să construim suprafețele ce caracterizează conductivitatea σ' (rezistivitatea ρ') după oricare dintre direcții. Mărimea σ', definită ca raportul dintre proiecția vectorului **j** pe direcția cîmpului **E** (vezi fig. 56) și modulul vectorului **E**, satisface ecuația*

$$\sigma' = c_1^2\sigma_{11} + c_2^2\sigma_{22} + c_3^2\sigma_{33}. \quad (3.24)$$

Comparînd această expresie cu (3.19) se poate trage concluzia că suprafața, ce caracterizează conductivitatea electrică după oricare dintre direcții în cristalele uniaxiale, poate fi de forma suprafeței reprezentate în fig. 55, a sau 55, b.

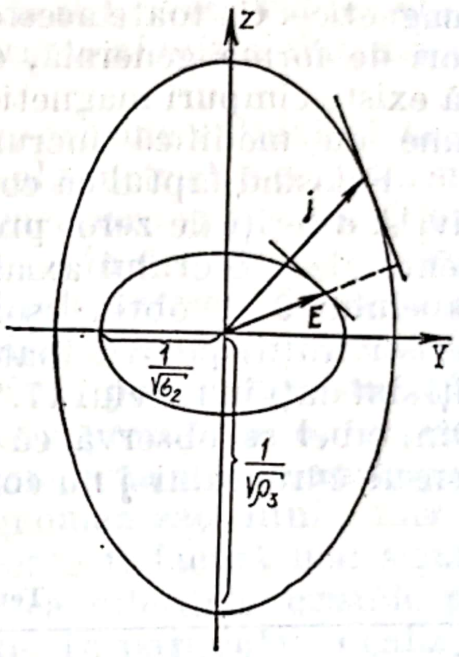


Fig. 56. Aflarea vectorului **j**(**E**) (ca direcție, sens și valoare[2] cunoscînd vectorului **E**(**j**). (Caz particular — secțiune în planul *XZ* a elipsoidului de rotație a cărui axă de rotație coincide cu axa *Z*).

Tensorul conductivității electrice $[\sigma]$ (precum și tensorul rezistivității electrice $[\rho]$ este simetric pentru toate clasele de cristale. După cum s-a remarcat deja, la clasele piromagnetice ($6/m$, $4/m$, $2/m$, m, $\bar{6}$, $\bar{4}$, $\bar{3}$, 1, 6, 4, 3, 2, 1) este posibilă magnetizarea spontană. În legătură cu aceasta, la asemenea cristale, prin aplicarea unui cîmp electric (după oricare direcție, în afară de aceea are coincide cu direcția de magnetizare spontană), ca rezultat al efectului Hall (vezi § 3.3) apare o diferență de potențial transversală ce determină, de asemenea, o anumită conductibilitate. Astfel, tensorul conductivității electrice (și al rezistivității) este un tensor de formă generală. Această afirmație nu contrazice *principiul simetriei Onsager* — una dintre teoremele termodinamicii proceselor staționare ireversibile. Prin-

---

* Mărimea σ' poate fi definită și ca raportul dintre proiecția vectorului **E** pe direcția vectorului **j** și modulul vectorului **j**, și va defini conductivitatea electrică *după direcția vectorului* (3.24), în timp ce σ' găsită din (2.26) va defini conductivitatea electrică *după direcția lui* **E** (vezi § 3.2).

cipiul Onsager își găsește o fundamentare teoretică în mecanica statistică, pe baza principiului reversibilității microscopice (reversibilitatea traiectoriei la inversarea vitezelor particulelor). Principiul Onsager confirmă faptul că tensorii analogi tensorilor $[\sigma]$ și $[\rho]$ trebuie să fie simetrici ($\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$; $\rho_{ij} = \rho_{ji}$). Aceasta simetrizare are loc, totuși, numai în absența cîmpurilor magnetice. Cu toate acestea, tensorii $[\sigma]$ și $[\rho]$ dați aici sînt tensori de forma generală, deoarece au fost obținuți cu condiția să existe cîmpuri magnetice. Faptul că aceste cîmpuri sînt spontane nu modifică lucrurile.

Folosind faptul că coeficienții σ_{ij} și ρ_{ij} sînt totdeauna pozitivi și diferiți de zero, precum și faptul că sînt permise componente ale vectorului axial la clasele piromagnetice, cu ajutorul tabelului 9 se obțin ușor tensorii conductivității electrice (și rezistivității) pentru toate clasele de cristale. Tensorii $[\sigma]$ găsiți sînt dați în tabelul 17. Tensorii $[\rho]$ sînt identici cu tensorii $[\sigma]$. Din tabel se observă că la cristalele piromagnetice uniaxiale, sensul curentului **j** nu coincide cu sensul cîmpului **E**, chiar și

Tabelul 11

Tensorii conductivității

Sistemul de simetrie al cristalelor	Forma tensorului	Simetria tensorului care descrie fenomenul	Numărul de coeficienți undependenți
Cubic	$\begin{matrix}\sigma_{11} & 0 & 0\\ 0 & \sigma_{11} & 0\\ 0 & 0 & \sigma_{11}\end{matrix}$	$\infty/\infty/mmm$	1
$6/mmm$, 622, $6mm$ $\bar{3}m$, $\bar{6}m2$, $3m$, 32 $4/mmm$, 422, $\bar{4}2m$	$\begin{matrix}\sigma_{11} & 0 & 0\\ 0 & \sigma_{11} & 0\\ 0 & 0 & \sigma_{33}\end{matrix}$	∞/mmm	2
$6/m$, 6, $\bar{6}$, 3, $\bar{3}$, $\bar{4}$, $4/m$, 4	$\begin{matrix}\sigma_{11} & -\sigma_{12} & 0\\ \sigma_{12} & \sigma_{11} & 0\\ 0 & 0 & \sigma_{33}\end{matrix}$	∞/m	3
Rombic	$\begin{matrix}\sigma_{11} & 0 & 0\\ 0 & \sigma_{22} & 0\\ 0 & 0 & \sigma_{33}\end{matrix}$	mmm	3
Monoclinic	$\begin{matrix}\sigma_{11} & \sigma_{12} & 0\\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & 0\\ 0 & 0 & \sigma_{33}\end{matrix}$	$2/m$	5
Triclinic	$\begin{matrix}\sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13}\\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23}\\ \sigma_{31} & \sigma_{22} & \sigma_{33}\end{matrix}$	$\bar{1}$	9

Scanned with OKEN Scanner

într-un plan perpendicular pe vectorul magnetizare spontană. Într-adevăr, în ciasa $4/m$, de exemplu, aplicarea unui cîmp perpendicular pe axa 4 conduce la conductivilitate după direcţia cîmpului $\mathbf{E}(j)$, caracterizată prin coeficientul $\sigma_{22} = (\sigma_{11})$ şi după o direcţie perpendiculară pe direcţia cîmpului $(j_\perp)$, caracterizată de coeficientul $-\sigma_{12}$. Sensul curentului total este determinat de suma vectorială a curenţilor $j_\parallel$ şi $j_\perp$. Vectorul rezultant se va afla, desigur, în planul de simetrie m al cristalului, dar nu va coincide ca sens cu vectorul **E**.

Tabelul 17 este întocmit pe baza considerentului că acolo unde *este permisă*, din punct de vedere al simetriei, o componentă axial-vectorială, în cristal *există* magnetizare spontană. O asemenea utilizare a simetriei este de obicei în dispută cu o părere destul de generală : simetria dă condiţiile *necesare* de existenţă a unui fenomen sau altuia (în particular, existenţa magnetizării spontane), dar nu dă condiţiile *suficiente* pentru aceasta. Fără a pune în discuţie în întregime această presupunere, se poate arăta, totuşi, că într-o serie de cazuri concluzia referitoare la posibilitatea reală de existenţă a unui fenomen sau altuia, într-un cristal, pe baza numai a simetriei poate fi făcută mai sigură.

Înainte de toate, să observăm că diferitele cristale pot avea interpretări geometrice deosebite. În particular, analizînd toate clasele de cristale care permit magnetizare spontană, se poate vedea că la clasele $6/m$, $\bar{6}$, $\bar{3}$, $\bar{4}$, $4/m$, $2/m$, m, $\bar{1}$ există numai direcţii axiale (după axa principală, după axa 2, după o direcţie perpendiculară pe planul de simetrie sau după orice direcţie). Astfel de direcţii nu pot fi nici polare (subordonate grupului ∞mm), nici de rotaţie (subordonate grupului $\infty 2$). Cele de mai sus permit să se afirme că la cristalele enumerate magnetizarea spontană are loc neapărat (bineînţeles, dacă se consideră că simetria cristalelor este determinată de poziţia şi mişcarea sarcinilor electrice). La celelalte clase de cristale care permit magnetizarea spontană şi au simetria 1, 2, 3 4, 6, interpretarea proprietăţilor de mediu este mai complicată, adică simetria axelor 1, 2, 3, 4, 6 este, în asemenea cristale, rezultatul superpoziţiei direcţiilor polare, a direcţiilor axiale şi a direcţiilor care fprezintă activitate optică.

e) POLARIZAREA ELECTRICĂ

Cristalele dielectricilor situate în cîmp electric extern se *polarizează*. Intensitatea cîmpului electric **E** în interiorul

dielectricului poate fi determinată numai luîndu-se în considerare polarizarea **P**. În cazul general, starea dielectricului este caracterizată de vectorii **E** şi **P**, precum şi de vectorul inducţie electrică **D**. Cîmpul de inducţie **D** este determinat de sarcinile libere, iar polarizarea **P** — de cele legate; diferenţa dintre numărul sarcinilor libere şi numărul sarcinilor legate* determină intensitatea cîmpului electric **E**. Între vectorii **D**, **P** şi **E** există o legătură dată de relaţia

$$\left.\begin{aligned} &\mathbf{P} = \alpha \mathbf{E};\\ &\mathbf{D} = \mathbf{E} + 4\pi \mathbf{P};\\ &\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}\\ &(\varepsilon = 1 + 4\pi\alpha), \end{aligned}\right\} \qquad (3.25)$$

unde α este polarizabilitatea dielectriculuii, iar ε — permitivitatea dielectrică.

În cazul general, mărimile α şi ε în cristale, ca mărimi ce leagă vectori polari, sînt tensori de ordinul doi. Să analizăm mai întîi procesul polarizării, descris de tensorul polar simetric $[\alpha]$. Coeficienţii principali α_i şi ε_i sînt totdeauna mai mari decît zero, deoarece polarizabilitatea dialectricilor este o mărime pozitivă. Aceasta permite totdeauna să se caracterizeze intuitiv polarizarea în dielectrici cu ajutorul suprafeţelor de tip elipsoid. În cazul cristalelor din sistemul cubic elipsoidul dielectric va fi o sferă. Vectorii **D** şi **E** în acest caz coincid totdeauna, ca sens, iar permitivitatea dielectrică va fi o mărime scalară. Pentru cristalele din sistemele mijlocii suprafaţa caracteristică este un elipsoid de rotaţie, iar pentru cristalele din sistemele inferioare — un elipsoid de formă generală.

Să considerăm ecuaţia suprafeţei caracteristice

$$\varepsilon_1 X^2 + \varepsilon_2 Y^2 + \varepsilon_3 Z^2 = 1 \qquad (3.26)$$

pentru tensorul $[\varepsilon]$ şi ecuaţia suprafeţei caracteristice pentru inversul acestei tensor — tensorul $[\varepsilon]^{-1}$

$$X^2/\varepsilon_1 + Y^2/\varepsilon_2 + Z^2/\varepsilon_3 = 1. \qquad (3.27)$$

Folosind aceste ecuaţii se poate determina uşor, pentru oricare direcţie dată a vectorului **E**, mărimea şi direcţia (şi sensul)

---

* *Sarcinile legate* aparţin particulelor din care este constituit dielectricul. Aceste sarcini nu pot fi îndepărtate din dielectric fără a-l distruge. *Sarcinile libere* sînt exterioare în raport cu dielectricul.

Scanned with OKEN Scanner

celorlalți doi vectori **D** și **P** (fig. 57)*. Suprafețele despre care este vorba, numite *elipsoizi dielectrici*, permit să se găsească vectorii **E** și **P**, fiind dat vectorul **D**. Din fig. 57 se vede că cei trei vectori **D**, **E** și **P** coincid doar de-a lungul axelor principale ale elipsoidului. După aceste direcții polarizarea este caracterizată de polarizabilitățile principale α_1, α_2, α_3 sau de permitivitățile dielectrice principale ε_1, ε_2, ε_3. Construcții similare se pot face și pentru tensorii $[\alpha]$ și $[\alpha]^{-1}$*.

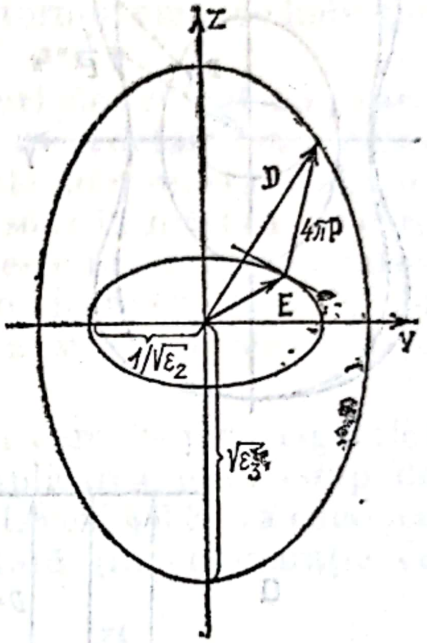


Fig. 57. Construcția vectorilor **D** și $4\pi\mathbf{P}$ cînd este dat vectorul **E** într-un dielectric anizotrop (caz particular — secțiune în planul XZ a elipsoidului de rotație a cărui axă de rotație coincide cu axa Z).

În general, vectorii **D**, **E** și **P** nu coincid ca direcție, iar sensul mărimilor ε și α nu este atît de simplu ca în cazul mediilor izotrope și al cristalelor cubice. Prin analogie cu optica, care analizează indicii de refracție după direcția razelor și a normalelor, în acest caz se introduce noțiunea de permitivitate dielectrică ε_E în direcția vectorului **E** și de permitivitate dielectrică ε_D în direcția vectorului **D**. Mărimea ε_E arată de cîte ori este mai scurt vectorul **E** decît proiecția sa pe direcția lui **D**. La rîndul său, ε_D indică de cîte ori este mai lung vectorul **D** decît proiecția sa pe direcția vectorului **E**.

Folosind relațiile (3.26) și (3.27) ($X \to E_1$, $Y \to E_2$, $Z \to E_3$) și avînd date direcțiile vectorilor **E** și **D** prin intermediul cosnușilor directori c_i ai acestor direcții cu axele sistemului de coordonate E_1, E_2, E_3 și D_1, D_2, D_3 respectiv, se obțin formulele care permit să se calculeze mărimile ε_E și ε_D cînd sînt date permitivitățile dielectrice principale ε_1, ε_2, ε

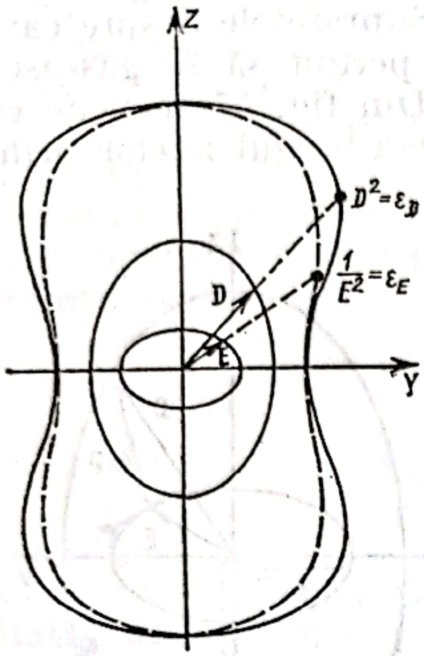
$$\left.\begin{aligned} \varepsilon_E &= c_1^2\varepsilon_1 + c_2^2\varepsilon_2 + c_3^2\varepsilon_3; \\ \frac{1}{\varepsilon_D} &= \frac{c_1^2}{\varepsilon_1} + \frac{c_2^2}{\varepsilon_2} + \frac{c_3^2}{\varepsilon_3}. \end{aligned}\right\}$$

---

* Sensul vectorului $4\pi\mathbf{P}$ se consideră dinspre sarcinile (legate) negative către cele pozizive; componenta normală a polarizării P_n este egală cu densitatea de sarcini legate σ'.

** Pentru dilatarea termică și polarizabilitate se folosește aceeași notație, α. În scopul eliminării confuziilor, în cazul dilatării termice se adaugă indicele T.

Scanned with OKEN Scanner



← Fig. 58. Suprafeţele mărimilor ε_E şi ε_D. (Secţiune prin suprafaţă în cazul particular în care aceasta este o suprafaţă de rotaţie. Axa Z coincide cu axa de rotaţie).

Aceste expresii permit să se construiască, pentru fiecare cristal, suprafeţe duale, ce caracterizează permitivitatea lui dielectrică într-o direcţie dată. Exemplu de asemenea suprafaţă este desenul din fig. 58. Mărimea ε determinată experimental este permitivitatea dielectrică în direcţia lui **E**, adică mărimea ε_E. Relaţia dintre

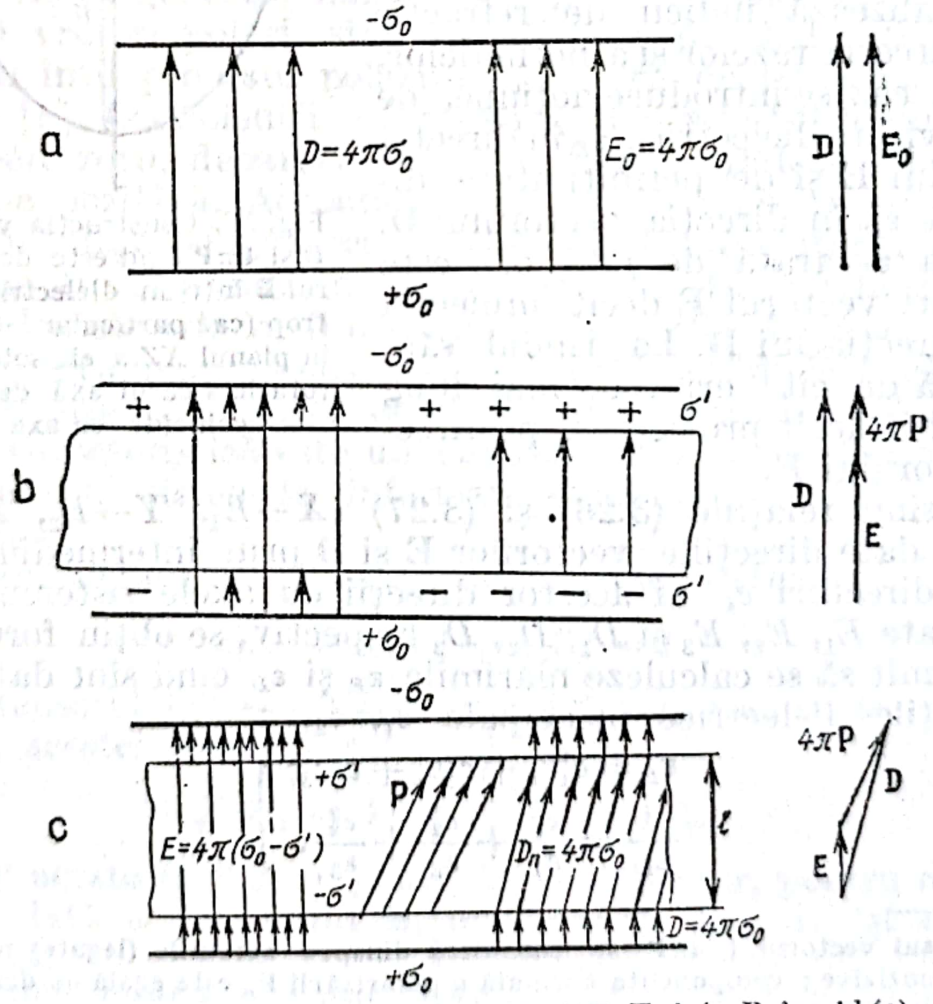


Fig. 59. Cîmpurile descrise de vectorii **D**, **E** şi $4\pi\mathbf{P}$, în vid (a), într-un dielecteri izotrop (b) şi într-un dielectric anizotrop (c). (Condensatorul plan are sarcinile $+\sigma_0$ şi $-\sigma_0$ pe plăcile sale).

Scanned with OKEN Scanner

cîmpurile descrise de vectorii **D**, **E** și $4\pi\mathbf{P}$ este reprezentată în fig. 59, pentru cazurile : vid, dielectric izotrop și dielectric anizotrop.

Chiar și atunci cînd tensorul $[\varepsilon]$ este simetric, în cazul general deplasarea sarcinilor dielctricului (care se efectuează în direcția vectorului **E**) nu coincide cu direcția vectorului cîmp de inducție **D** (fig. 60).

Problema simetrizării tensorilor polari de ordinul doi, care descriu proprietățile cristalului, a fost analizată detaliat la punctele a) și d) ale acestui paragraf. Aici se poate doar repeta că abaterea de la simetrie a acestor tensori are sens în măsura în care pentru clasele de cristale piromagnetice este reală magnetizarea spontană. În cazurile cînd nu există magnetizare spontană în piromagnetici, formele tensorilor $[\varepsilon]$ și $[\alpha]$ vor coincide cu cele date în tabelul 16.

Mai general se pare că este cazul în care în piromagnetici există magnetizare spontană. Atunci aplicarea unui cîmp de inducție (din nou pe seama efectului Hall, vezi § 3.3) va conduce la o polarizare transversală suplimentară (în comparație cu aceea care este reprezentată în fig. 60). Tabelele de tensori $[\varepsilon]$ și $[\alpha]$ pentru toate clasele de cristale, în cazul existenței magnetizării spontane la piromagnetici, coincid cu tabelul 17.

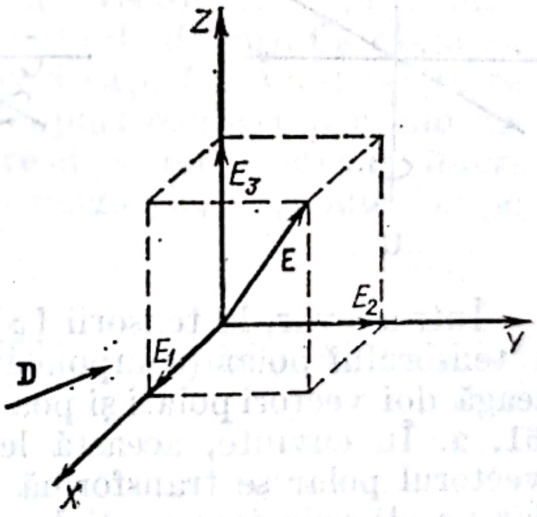


Fig. 60. Deplasarea sarcinilor într-un dielectric anizotrop sub acțiunea cîmpului **D**. Segmentele de pe axele *X*, *Y*, *Z* (E_1, E_2, E_3) sînt proporționale cu mărimile ε_{11}, ε_{22}, ε_{33} respectiv.

f) TENSORUL PERMITIVITĂȚII MAGNETICE

Vectorul axial inducție magnetică, sau flux magnetic, **B**, este legat de vectorul axial intensitate a cîmpului magnetic **H** prin intermediul permitivității magnetice μ

$$\mathbf{B} = [\mu]\mathbf{H} \qquad (3.29)$$

În cazul general al mediilor anizotrope mărimea μ este un tensor polar de ordinul doi.

Formal, descrierea procesului de magnetizare este analogă descrierii procesului de polarizare electrică, iar ecuația (3.29)

Scanned with OKEN Scanner

este analogă celei de-a treia dintre ecuaţiile (3.25). Şi în acest caz pot fi construite suprafeţele caracteristice pentru determinarea orientării unuia dintre vectori cînd este dat celălalt (vezi fig. 57)*, suprafeţe ce caracterizează valorile mărimii respective în direcţia dată (vezi fig. 58). Toate consideraţiile făcute în acest paragraf asupra simetrizării tensorilor de proprietăţi $[\alpha^T]$, $[\sigma]$, $[\varepsilon]$ şi alţii sînt valabile şi pentru tensorul $[\mu]$: la clasele de cristale piromagnetice acest tensor trebuie considerat drept un tensor de formă generală (vezi tabelul 17) dacă este posibilă magnetizarea spontană.

Faţă de tensorii de proprietăţi enumeraţi mai sus, tensorul $[\mu]$ are o caracteristică ce-i este specifică şi-l face să difere de aceşti tensori de ordinul doi. Este vorba despre faptul că tensorul $[\mu_{ij}]$ leagă doi vectori axiali (şi nu polari) şi această caracteristică apare atunci cînd se ia în consideraţie partea antisimetrică a tensorului (componentele μ_{12} şi $-\mu_{12}$).

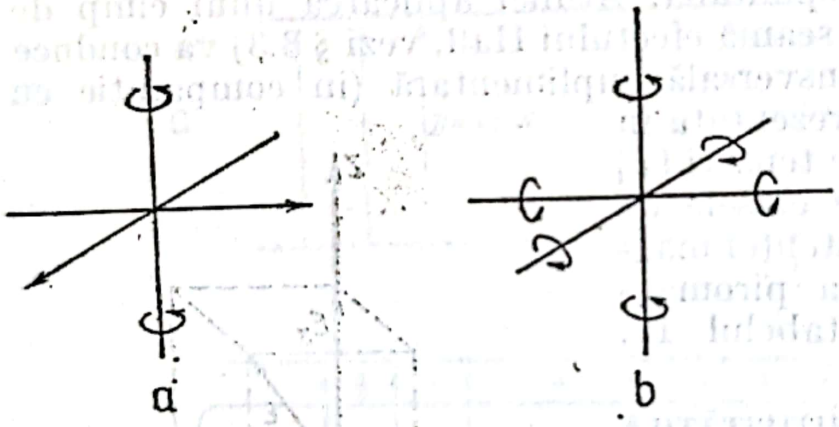


Fig. 61. Transformarea reciprocă a vectorilor polari şi axiali:
a — transformarea unui vector polar într-un vector de asemenea polar prin intermediul unuia axial; b — transformarea unuia vector axial într-un vector de asemenea axial prin intermediul unuia axial.

Într-adevăr, la tensorii $[\rho]$, $[\varepsilon]$ şi alţii, partea antisimetrică a tensorului polar (componentele care descriu un vector axial) leagă doi vectori polari şi poate fi reprezentată grafic ca în fig. 61, a. În cuvinte, această legătură se poate exprima astfel: vectorul polar se transformă într-un vector polar (perpendicular pe el) prin intermediul unui vector axial; terţetul acestor vectori este orientat reciproc perpendicular. Simetria terţetului de vectori este reprezentată în fig. 61, a şi este descrisă de grupul m (în cadrul simetriei complete — de grupul $\underline{m}m\underline{2}$).

Partea antisimetrică a tensorului $[\mu]$ leagă doi vectori axiali prin intermediul unuia axial (fig. 61, b). Toţi cei trei vectori sînt, de asemenea, reciproc perpendiculari; simetria acestui ter-

* Analogul vectorului **P** în magnetism este vectorul intensitate a magnetizării **J**.

țet este descrisă de grupul $\bar{3}$ (în cadrul simetriei complete — grupul $\bar{3}m$).

Din punct de vedere analitic, terțetul vectorilor din fig. 61,a reprezintă produsul vectorial a doi vectori polari

$$[\mathbf{ab}] = \mathbf{c}. \tag{3.30}$$

Vectorul $\mathbf{c}$, după cum se știe, este un vector axial. Din fig. 61, b se vede că se poate defini analitic și produsul vectorial a doi vectori axiali $\mathbf{a}_{ax}$ și $\mathbf{b}_{ax}$, care dă în ultimă instanță tot un vector axial $\mathbf{c}_{ax}$,

$$[\mathbf{a}_{ax}\mathbf{b}_{ax}] = \mathbf{c}_{ax}. \tag{3.31}$$

Caracterul transformării unui vector în altul sau legătura dintre trei vectori, reprezentată în fig. 61, a se întîlnește la descrierea multor fenomene fizice (vezi cap. 5). Aici vom arăta doar că acești vectori pot fi interpretați drept vectorii **E**, **H** și **G** ai undei electromagnetice (**G** — vectorul Poynting-Umov). Același terțet de vectori descrie efectul Hall (vezi § 3.3) și alte fenomene. Fenomenul descris de terțetul vectorilor reprezentați în fig. 61, b nu este chiar atît de simplu de distins. Ca exemplu poate servi precesia giroscopului (vezi cap. 5). Acest terțet se poate modela cu ajutorul a două cîmpuri reciproc perpendiculare. În acest caz, în domeniul în care ele se intersectează (interpătrund) trebuie să existe un cîmp magnetic, pependicular pe ele.

3.3. FENOMENE DESCRISE DE TENSORI AXIALI DE ORDINUL DOI

a) EFECTUL MAGNETOELECTRIC

Fenomenul de polarizare electrică sub influența cîmpului magnetic și de magnetizare sub influența cîmpului electric, prevăzute teoretic și descoperite experimental relativ nu demult*, poartă denumirea de *efect magnetoelectric* și este descris de un tensor axial de ordinul doi. Considerînd din partea elec-

---

* Landau, L. D., Lifșit, E. M. *Electrodinamica mediilor continue* (traducere din limba rusă), Editura tehnică, București, 1968; Astrov. D. N.. *Despre efectul magnetic în antiferomagnetici*, Jurn. exp. i teor. fiz., 38, 3, 984, 1960,

trică vectorul **E**, iar din cea magnetică vectorul **H** şi notînd tensorul efectului magnetoelectric prin simbolul $[A]$, vom avea

$$\mathbf{E} = [A_{ij}]\,\mathbf{H}\,; \quad E_i = A_{ij}H_j. \tag{3.32}$$

Într-o asemenea scriere, ecuaţiile (3.32) descriu cîmpul electric **E** în funcţie de cîmpul magnetic (exterior) dat de **H**. Dependenţa inversă va fi descrisă de tensorul $[A]^{-1}$.

Tensorul $[A]$ este un tensor *de proprietate* şi simetria lui concordă cu simetria cristalului. Pentru a-i determina formele corespunzătoare tuturor claselor de cristale trebuie să folosim tabelul 10. După cum se vede din acest tabel, partea simetrică a tensorului axial este descrisă de patru grupuri de simetrie : $\infty/\infty 2$, $\infty 2$, mmm, $\bar{4}2m$; partea antisimetrică reprezintă un vector polar şi este descrisă de grupul ∞mm. Grupurile de simetrie ale cristalelor la care este posibil efectul magnetoelectric (în completarea la grupurile din tabelul 10) se obţin prin înlocuirea axei de simetrie ∞ cu axele de ordinul trei, patru şi şase. Pentru grupul $\infty/\infty 2$ vor exista grupurile subordonate 432 şi 23. Ultimul este subordonat grupului $\infty/\infty 2$ prin intermediul grupului ∞/∞ (vezi fig. 9).

Ansamblul tuturor formelor tensorilor care descriu efectul magnetoelectric la cristale este dat în tabelul 18. Se vede cu uşurinţă că unele dintre formele din tabelele 10 şi 18 au aspect diferit. Aceasta se datoreşte, în ultimă instanţă, alegerii diferite a sistemului de coordonate. Astfel, pentru clasa $\bar{4}$ are sens să considerăm în completare tensorul efectului magnetoelectric (în comparaţie cu clasa $\bar{4}2m$), deoarece direcţia axelor X şi Y nu este fixată la această clasă şi forma tensorului în cele două clase este diferită. Tensorul corespunzător pentru clasa $mm2$ în tabelul 18 reprezintă combinaţia tensorului cu simetria $\bar{4}2m$ cu un vector polar (∞mm). Totuşi, întrucît axele X şi Y sînt rotite la clasa $mm2$, faţă de aceleaşi axe din clasa $\bar{4}2m$, cu un unghi de 45°, formele tensorilor clasei $mm2$ diferă în tabelele 10 şi 18. Aceasta se exprimă prin aceea că în tabelul 18 componentele proprii ale tensorului axial şi ale vectorului polar apar „amestecate", în timp ce în tabelul 10 (în care s-a considerat simetria intrinsecă a tensorului) s-a luat tot timpul sistemul principal de coordonate al părţii simetrice ; aceste componente sînt, astfel, totdeauna separate. O situaţie asemănătoare întîlnim şi la clasa m. În tabelul 10, pentru această clasă, partea simetrică (tensorul $\bar{4}2m$) are axa $\bar{Z}$, care coincide cu axa $\bar{4}$, iar în clasa m axa Z este perpendiculară pe axa $\bar{4}$ şi situată în planul m. Datorită faptului că în clasa 2 poate fi fixată doar orientarea uneia dintre

Scanned with OKEN Scanner

Tabelul 18

Tensorii axiali de ordinul doi care descriu efectul magnetoelectric în cristale

Clasele cristalografice	Forma tensorului	Simetria fenomenului (tensorului)	Orientarea axelor
432, 23; $m3$, $\bar{4}3m$, $m3m$	$\begin{matrix} A_{11} & 0 & 0 \\ 0 & A_{11} & 0 \\ 0 & 0 & A_{11} \end{matrix}$	$\infty/\infty 2$	Orientarea axelor este arbitrară
622, 422, 32; $4mm$, $\bar{4}2m$, $4/mmm$, $3m$ $\bar{3}m$, $6mm$, $\bar{6}m2$, $6/mmm$	$\begin{matrix} A_{11} & 0 & 0 \\ 0 & A_{11} & 0 \\ 0 & 0 & A_{33} \end{matrix}$	$\infty 2$	Axa ∞ a tensorului coincide cu axa Z
222; $2mm$, mmm	$\begin{matrix} A_{11} & 0 & 0 \\ 0 & A_{22} & 0 \\ 0 & 0 & A_{33} \end{matrix}$	222	Axele 2 ale tensorului coincid cu axele X, Y, Z
$\bar{4}2m$; 422, $4mm$, $\bar{4}2m$, $4/mmm$	$\begin{matrix} A_{11} & 0 & 0 \\ 0 & -A_{11} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix}$	$42m$	Axa $\bar{4}$ a tensorului coincide cu axa Z
$6mm$, $4mm$, $3m$; 422, $\bar{4}2m$, $4/mmm$, 32, $\bar{3}m$, 622, $\bar{6}m2$, $6/mmm$	$\begin{matrix} 0 & -A_{12} & 0 \\ A_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix}$	∞mm	Axa ∞ a vectorului polar coincide cu axa Z

Scanned with OKEN Scanner

Tabelul 18 (continuare)

Clasele cristalografice	Forma tensorului	Simetria fenomenului (tensorului)	Orientarea axelor
6, 4, 3; $\underline{\bar{4}}$, $\underline{\bar{3}}$, $\underline{\bar{6}}$, $6/\underline{m}$, $4/\underline{m}$	$\begin{matrix} A_{11} & -A_{12} & 0 \\ A_{12} & A_{11} & 0 \\ 0 & 0 & A_{33} \end{matrix}$	∞	Axele ∞ ale tensorilor $\infty 2$ și ∞mm sînt orientate după Z
$\bar{4}$; $\underline{4}$, $\underline{4}/\underline{m}$	$\begin{matrix} A_{11} & A_{12} & 0 \\ A_{12} & -A_{11} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix}$	$\bar{4}$	Orientarea axelor X și Y în tensorul $\bar{4}2m$ nu este fixată. Axa ∞ a tensorului ∞mm și axa $\bar{4}$ a tensorului $\bar{4}2m$ sînt orientate după Z
$mm2$; $\underline{2}\underline{2}2$, $\underline{2}m\underline{m}$, $\underline{m}mm$	$\begin{matrix} 0 & A_{12} & 0 \\ A_{21} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix}$	$mm2$	Axa $\bar{4}$ a tensorului $\bar{4}2m$ coincide cu Z și tensorul este rotit în jurul axei Z cu 45°; axa ∞ a tensorului ∞mm coincide cu axa Z
m; $\underline{2}$, $\underline{2}/m$	$\begin{matrix} 0 & 0 & A_{13} \\ 0 & 0 & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & 0 \end{matrix}$	m	Axa $\bar{4}$ a tensorului $\bar{4}2m$ se află în planul m; axa ∞ a vectorului polar se află în planul m; perpendiculară pe planul m este axa Z a tensorului, dar orientarea axelor X, Y ale acestuia nu este fixată
2; $\underline{m}$, $2/\underline{m}$	$\begin{matrix} A_{11} & A_{12} & 0 \\ A_{21} & A_{22} & 0 \\ 0 & 0 & A_{23} \end{matrix}$	2	Una dintre axele 2 ale tensorului 222 coincide cu axa Z; axa tensorului ∞mm coincide cu axa Z
1; $\underline{\bar{1}}$	$\begin{matrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{matrix}$	1	Axele părților simetrică și antisimetrică ale tensorului sînt orientate arbitrar

Scanned with OKEN Scanner

axele tensorului de simetrie 222, și tensorii clasei 2 diferă în cele două tabele (10 și 18).

Din tabelul 18 se observă că efectul magnetoelectric este posibil la 18 clase de cristale*. Trebuie să remarcăm în acest caz că formele tensorilor date în tabelul 18 pot fi obținte și direct (nu cu ajutorul tabelului 10). În acest scop, folosind tabelul 8 se poate arăta — prin calcule directe — ce limitări impun elementele de simetrie ale unei clase de cristale sau alteia asupra formei tensorului axial de ordinul doi. În particular, din tabelul 8 se vede ușor că efectul magnetoelectric nu este posibil la clasele centrosimetrice, deoarece prin inversarea sistemului de coordonate față de origine *toți* coeficienții tensorului își inversează semnele, adică nu se transformă în ei înșiși.

Observăm că găsirea nemijlocită a limitărilor impuse asupra coeficienților tensorului reprezintă, în esență, cerința ca simetria proprietăților de material (tensorului) să conțină toate elementele de simetrie ale cristalului (principiul lui Neuman). Mai mult, la aflarea respectivei limitări, simetria proprietăților (tensorului) nu coincide totdeauna cu simetria cristalului. Este posibilă, în acest caz, chiar creșterea ordinului de simetrie al proprietății (tensorului) în comparație cu simetria cristalului.

Un exemplu simplu : prezența în cristal a axei de simetrie 3 și de ordin mai înalt impune asupra componentelor cerințe ca, de exemplu, direcția considerată să fie axă ș.a.m.d. De aici și rezultă o simetrie de proprietăți, permisă de principiul lui Neuman, mai înaltă decît simetria cristalului (bineînțeles, atunci cînd grupul de simetrie al cristalului este subgrup al simetriei proprietăților acestuia).

Părțile simetrică și antisimetrică ale tensorului efectului magnetoelectric descriu procese diferite din punct de vedere fizic. Astfel, partea simetrică transformă vectorul polar în vector axial (sau invers) după axele principale în așa fel încît ambii sînt situați pe o singură dreaptă (*efect longitudinal*). Partea antisimetrică transformă acești vectori prin intermediul unui vector polar (vezi fig. 61, a) și descrie *efectul transversal*, fenomenul în ansamblu fiind analog cu efectul Hall (vezi § 3.3, b). Acest efect apare în cazul cînd există polarizare spontană necompensată, de exemplu, de sarcinile libere. Totuși, ultima condiție se îndeplinește foarte greu. De aceea, polarizarea

* De pe pozițiile simetriei, efectul magnetoelectric este posibil la 58 clase, dintre care 18 sînt notate la fel ca și în cadrul simetriei obișnuite. Restul de 40 clase sînt date în tabelul 18 și sînt scrise după punct și virgulă lîngă tensorii corespunzători lor. Atragem atenția că adeseori în literatură notațiile claselor din simetria magnetică coincid cu notațiile din simetria completă.

Scanned with OKEN Scanner

transversală (pe seama efectului Hall) la cristalele la care este permisă magnetizare spontană (vezi § 3.2, e) poate fi detectată experimental mai simplu decît polarizarea transversală apărută ca urmare a aplicării unui cîmp magnetic asupra cristalelor ce admit polarizare spontană.

Partea simetrică a tensorului $[A]$ permite, de fapt, o aceeaşi interpretare geometrică ca şi tensorul $[\varepsilon]$ şi alţii asemănători lui (vezi § 3.2). Particularitatea caracteristică a tensorului $[A]$ constă în faptul că el nu are neapărat coeficienţii diferiţi de zero. La clasele $\bar{4}2m$, $\bar{4}$, $mm2$ şi m partea simetrică are coeficienţii egali în modul, dar de semne diferite ($A_{22} = -A_{11}$). La clasa 222 este posibil fie cazul $A_{11} \neq A_{22} \neq A_{33}$, fie cazul $A_{22} = -A_{11}$, $A_{33} = 0$. Aceasta înseamnă că, pentru clasele de cristale menţionate aici, suprafeţele caracteristice vor fi hiperboloizi*, iar pentru celelalte — elipsoizi.

Suprafeţele ce caracterizează efectul magnetoelectric la clasele $\bar{4}2m$, $\bar{4}$, $mm2$, m (şi 222) degenerează în curbe. Definind mărimea A_H ca raportul dintre proiecţia vectorului **E** pe direcţia vectorului **H** şi modulul vectorului **H**, ecuaţia

$$A'_H = c_1^2 A_{11} - c_2^2 A_{11} \qquad (3.33)$$

ne dă curba ce caracterizează mărimea A_H în direcţia dată (fig. 62). Semnele plus şi minus afectate lui A_H înseamnă că după una dintre axe vectorii **E** şi **H** formează o combinaţie dreaptă, iar după cealaltă o combinaţie stîngă.

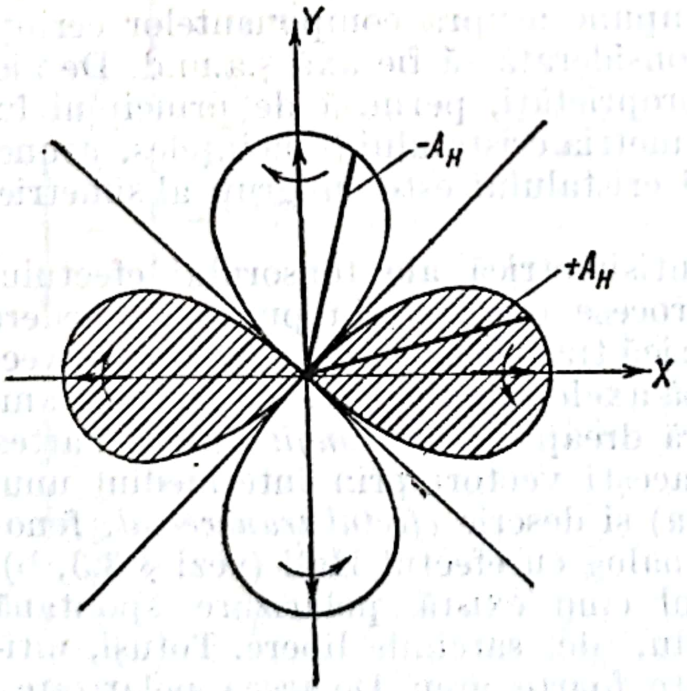


Fig. 62. Mărimea A_H ce caracterizează efectul magnetoelectric în direcţia vectorului **H** pentru cristalele din clasele $\bar{4}2m$, $\bar{4}$, mm, 2, m şi 222.

e) EFECTUL HALL

Dacă situăm o plăcuţă, prin care trece curent electric, într-un cîmp magnetic orientat perpendicular pe curent, în plăcuţă apare o diferenţă de potenţial trans-

* Mai precis, hiperbole, deoarece pentru clasele $42m$, $mm2$, m (şi, în unele cazuri, şi la clasa 222) reprezentarea este bidimensională.

versală. Acest fenomen este descris de interacţiunea a trei vectori (vezi fig. 61, a) şi senumeşte *efect Hall*. Caracterul interacţiunii cîmpurilor la efectul Hall este reprezentat în fig. 63. Din desen se vede că acest efect poate fi tratat ca rezultat al interacţiunii cîmpului magnetic al curentului electric H_{el} cu cîmpul magnetic extern H_{ex}. Interacţiunea reprezentată schematic, pentru cele două sensuri — dextrogir şi levogir — nu este identică: într-un caz cîmpurile magnetice coincid, în celălalt sînt îndreptate unul către altul*. Astfel, sub influenţa cîmpului extern vectorul curent **j** se roteşte, ceea ce conduce la apariţia unei componente transversale a curentului **j′** (deci şi la apariţia unei diferenţe de potenţial transversale).

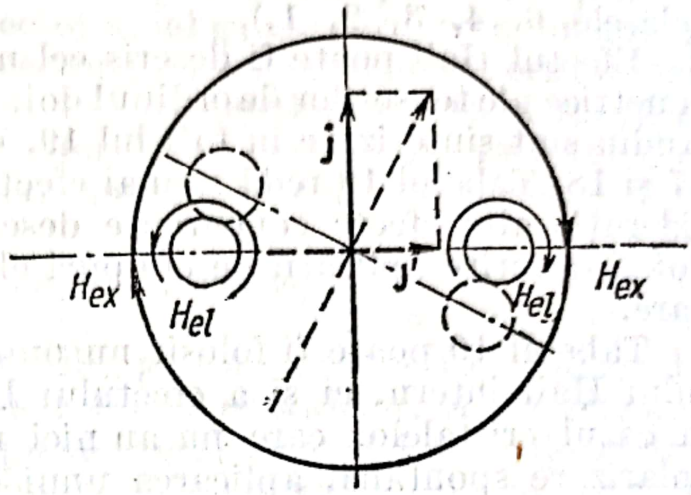


Fig. 63. Interacţiunea cîmpurilor în cadrul efectului Hall. Cîmpul magnetic exterior este perpendicular pe planul desenului. Punctat s-a reprezentat direcţia (şi sensul) curentului j după aplicarea cîmpului magnetic.

În cadrul analizei pe care o facem aici nu este necesar să descriem detaliat efectul Hall. Ne vom limita numai la aşa-numitul *efect Hall intern*, adică la efectul legat de cîmpurile electrice şi magnetice spontane. După cum s-a spus în treacăt mai înainte, efectul Hall apare în cristalele care prezintă magnetizare spontană prin aplicarea unui cîmp electric (vezi § 3.2, e) şi în cristalele cu polarizare spontană la aplicarea unui cîmp magnetic (vezi § 3.3, a). Prin urmare, efectul Hall intern este posibil la cristalele din clasele $6/m$, $4/m$, $2/m$, m, $\bar{6}$, $\bar{4}$, $\bar{3}$, $\bar{1}$, $6mm$, $4mm$, $3m$, $mm2$, 6, 4, 3, 2, 1.

Întrucît orientarea unuia dintre vectori este dată şi fixată, efectul Hall intern este descris de un sistem de ecuaţii relativ simple

$$E_i = \beta_{ij} j_j \; ; \; E_i = \gamma_{ij} H_j. \qquad (3.34)$$

Prima ecuaţie descrie efectul Hall în cristalele magnetizate spontan, iar a doua — în cristalele polarizate spontan.

* Fenomenul are caracterul microscopic, astfel că ceea ce am reprezentat aici se întîmplă într-un punct. În celelalte puncte fenomenul este analog, cîmpurile sînt orientate identic, ceea ce conduce în final la un efect macroscopic.

Scanned with OKEN Scanner

Mărimile β_{ij} şi γ_{ij} sînt constantele Hall ; $[\beta]$ este tensor polar, iar $[\gamma]$ — tensor axial.

La cristalele la care este posibilă atît polarizare spontană, cît şi magnetizare spontană, efectul apare în ambele cazuri (clasele 6, 4, 3, 2, 1,).

Efectul Hall poate fi descris cel mai simplu de părţile antisimetrice ale tensorilor de ordinul doi. Rezultatele unui asemenea studiu sînt sintetizate în tabelul 19, întocmit pe baza tabelelor 17 şi 18. Tabelul 19 redă numai efectul Hall, fără a lua în consideraţie alte efecte concurente descrise de tensori de ordinul doi şi datorite aplicării de cîmpuri electrice (magnetice) exterioare.

Tabelul 19 poate fi folosit nu numai pentru descrierea efectului Hall intern, ci şi a efectului Hall „indus". Într-adevăr, în cazul cristalelor care nu au nici magnetizare spontană, nici polarizare spontană, aplicarea unui cîmp extern **E** (sau **H**) le face să devină polarizate (magnetizate) şi problema se reduce la descrierea efectului în cristale polarizate (magnetizate) spontan. Trebuie, totuşi, să avem în vedere că la utilizarea tabelului 19 este necesar să considerăm nu simetria iniţială a cristalului, ci aceea pe care o capătă el sub influenţa cîmpului. Grupul de simetrie corespunzător va fi sau unul dintre grupurile polare, sau unul dintre grupurile axiale.

Tabelul 19

Tensorii de ordinul doi care descriu efectul Hall intern

Tensorii polari pentru cristalele care au magnetizare spontană		Tensorii axiali pentru cristalele care au polarizare spontană	
Clasele de cristale	Forma tensorului	Clasele de cristale	Forma tensorului
$6/m$, $4/m$, $\bar{6}$, $\bar{4}$, $\bar{3}$, 6, 4, 3, 2 $2/m$, m	$\begin{matrix} 0 & -\beta_{12} & 0 \\ \beta_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix}$	$6mm$, $4mm$, $3m$, $mm2$, 6, 4, 3, 2	$\begin{matrix} 0 & -\gamma_{12} & 0 \\ \gamma_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix}$
$\bar{1}$, 1	$\begin{matrix} 0 & -\beta_{12} & \beta_{13} \\ \beta_{12} & 0 & -\beta_{23} \\ -\beta_{13} & \beta_{23} & 0 \end{matrix}$	m	$\begin{matrix} 0 & 0 & \gamma_{13} \\ 0 & 0 & -\gamma_{23} \\ -\gamma_{13} & \gamma_{23} & 0 \end{matrix}$
—	—	1	$\begin{matrix} 0 & -\gamma_{12} & \gamma_{13} \\ \gamma_{12} & 0 & -\gamma_{23} \\ -\gamma_{31} & \gamma_{32} & 0 \end{matrix}$

c) ROTIREA PLANULUI DE POLARIZARE AL LUMINII

La unele cristale planul de polarizare se roteşte atunci cînd prin ele trece o undă electromagnetică luminoasă, unghiul de

Scanned with OKEN Scanner

rotație fiind proporțional cu drumul parcurs de lumină în cristal. Din punct de vedere fizic, această rotație se datorește interacțiunii vectorului electric **E** al undei electromagnetice cu cîmpul electric al cristalului. Rotirea planului de polarizare poate fi caracterizată printr-un vector axial $\boldsymbol{\varphi}$, ale cărui componente φ_i vor fi proiecțiile acestui vector pe axele sistemului cristalofizic de coordonate. Rotația planului de polarizare este descrisă de un tensor axial de ordinul doi $[\rho_{ij}]$, care leagă vectorul $\boldsymbol{\varphi}$ cu vectorul polar unitate **k** al direcției razei luminoase.

$$\boldsymbol{\varphi} = [\rho]\,\mathbf{k}\,; \quad \varphi_i = \rho_{ij} k_j. \tag{3.35}$$

În cazul general, tensorul $[\rho]$ este nesimetric. Partea lui simetrică descrie *activitatea optică* a cristalelor. Acest fenomen se evidențiază dintre grupurile de fenomene legate de rotirea planului de polarizare al luminii. Caracteristica lui este faptul că activitatea optică este considerată ca o legătură „pseudoscalară" între vectorii $\boldsymbol{\varphi}$ și **k**. În particular, această „pseudoscalaritate" (mai exact, acest caracter tensorial-axial) constă în aceea că la rotirea cristalului cu 180° în jurul unei direcții pependiculare pe fasiculul luminos, adică la interschimbarea locului de intrare și de ieșire a fasciculului, atît mărimea efectului, cît și sensul de rotație rămîn neschimbate.

În sistemul principal de coordonate, a doua dintre ecuațiile (3.35) se scrie sub forma unui sistem

$$\varphi_1 = \rho_{11} k_1\,; \quad \varphi_2 = \rho_{22} k_2\,; \quad \varphi_3 = \rho_{33} k_3$$

unde coeficienții ρ_{11}, ρ_{22}, ρ_{33} sînt rotațiile *specifice* ale planului de polarizare al luminii. Pentru cuarț, de exemplu (grupul de simetrie 32), rotația specifică după axa optică (axa Z) al liniei D a sodiului reprezintă 21,7° pe un milimetru de drum parcurs de lumină.

Simetria cristalului impune limitări asupra coeficienților tensorului activității optice. Forma tensorului pentru o clasă oarecare de cristale se poate obține folosind tabelul 18 și reținînd doar partea simetrică a tensorului. Tensorii activității optice pentru toate clasele de cristale sînt dați în tabelul 20. Orientarea reciprocă a elementelor de simetrie ale părții simetrice a tensorului $[\rho]$ și a sistemului de coordonate cristalofizice al cristalului este în tabelul 20 aceeași ca și în tabelul 18. Din tabelul 20 se vede că prezintă activitatea optică 15 clase de cristale : 432, 23, 622, 422, 32, 222, $\bar{4}2m$, $\bar{4}$, $mm2$, 6, 4, 3, m, 2,1.

Scanned with OKEN Scanner

Tabelul 20

Tensorii axiali de ordinul doi care descriu activitatea optică (partea simetrică)

Clasele de cristale	Forma tensorului	Simetria fenomenului (tensorului)	Clasele de cristale	Forma tensorului	Simetria fenomenului (tensorului)
432, 23	$\begin{matrix}\rho_{11} & 0 & 0\\ 0 & \rho_{11} & 0\\ 0 & 0 & \rho_{11}\end{matrix}$	$\infty/\infty 2$	$mm2$	$\begin{matrix}0 & \rho_{12} & 0\\ \rho_{12} & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{matrix}$	$mm2$
622, 422, 32, 6, 4, 3	$\begin{matrix}\rho_{11} & 0 & 0\\ 0 & \rho_{11} & 0\\ 0 & 0 & \rho_{33}\end{matrix}$	$\infty 2$	m	$\begin{matrix}0 & 0 & \rho_{13}\\ 0 & 0 & \rho_{23}\\ \rho_{13} & \rho_{23} & 0\end{matrix}$	
222	$\begin{matrix}\rho_{11} & 0 & 0\\ 0 & \rho_{22} & 0\\ 0 & 0 & \rho_{33}\end{matrix}$	222	2	$\begin{matrix}\rho_{11} & \rho_{12} & 0\\ \rho_{12} & \rho_{22} & 0\\ 0 & 0 & \rho_{33}\end{matrix}$	2
$\bar{4}2m$	$\begin{matrix}\rho_{11} & 0 & 0\\ 0 & -\rho_{11} & 0\\ 0 & 0 & 0\end{matrix}$	$\bar{4}2m$	1	$\begin{matrix}\rho_{11} & \rho_{12} & \rho_{13}\\ \rho_{12} & \rho_{22} & \rho_{23}\\ \rho_{13} & \rho_{23} & \rho_{33}\end{matrix}$	1
$\bar{4}$	$\begin{matrix}\rho_{11} & \rho_{12} & 0\\ \rho_{12} & -\rho_{11} & 0\\ 0 & 0 & 0\end{matrix}$	$\bar{4}$			

Caracteristicile geometrice ale părţii simetrice a tensorului sînt analoge cu caracteristicile altor tensori (vezi § 3.2 şi 3.3). În legătură cu aceasta trebuie să avem în vedere că la cristalele claselor $\bar{4}2m$, $\bar{4}$, $mm2$ şi m există două direcţii reciproc perpediculare după care activitatea optică are semne opuse: planul de polarizare al luminii se poate roti într-o direcţie după regula şurubului drept, iar în cealaltă — după regula şurubului stîng (fig. 64, a). Fenomene similare se observă şi la clasele 222, 2 şi 1* (fig. 64, b). În concordanţă cu aceasta, suprafeţele ce caracterizează activitatea optică într-o direcţie dată pot fi bicolore (vezi fig. 64, b).

Partea antisimetrică a tensorului $[\rho]$ descrie rotirea planului de polarizare datorită polarizării electrice spontane. Acest efect transversal, care se reprezintă grafic analog efectului Hall, redă legătura dintre vectori reprezentată în fig.

* Aceste clase sînt, de asemenea, subordonate clasei $\bar{4}2m$, cu toate că ele mai sînt subordonate şi grupului $\infty 2$ şi pot avea coeficienţii ρ_{ij} de un singur semn.

Scanned with OKEN Scanner

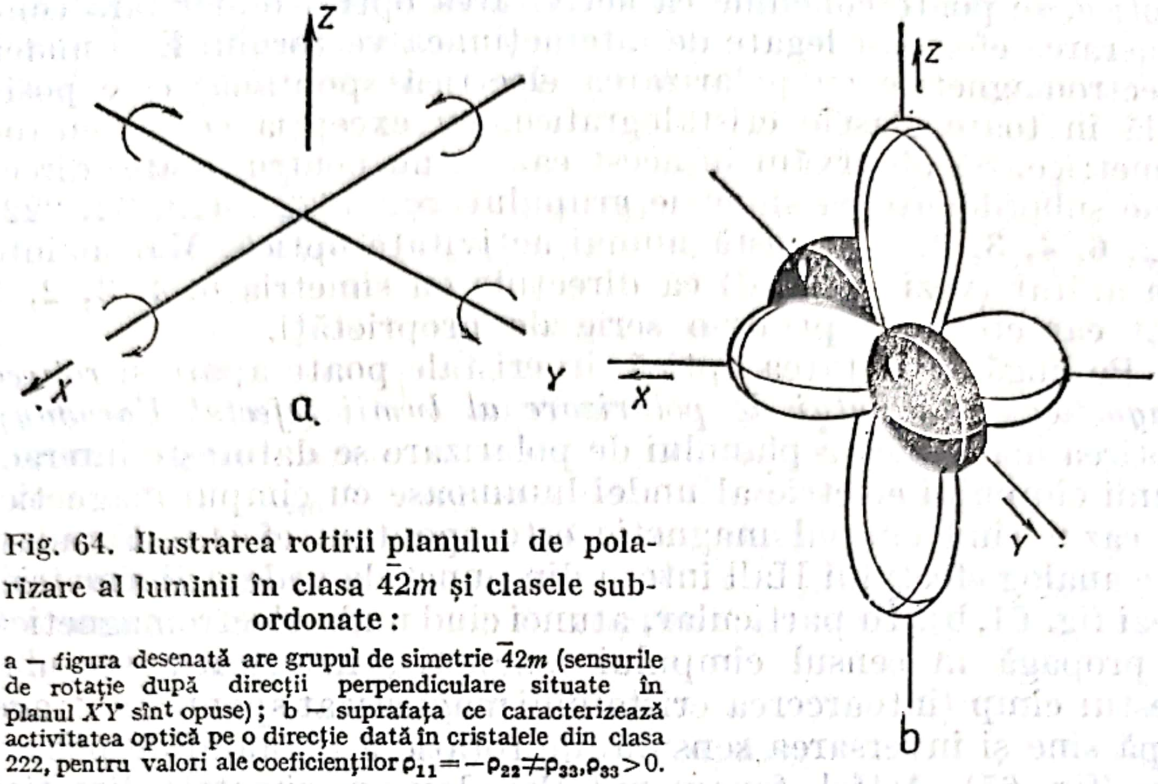


Fig. 64. Ilustrarea rotirii planului de polarizare al luminii în clasa $\bar{4}2m$ și clasele subordonate:

a — figura desenată are grupul de simetrie $\bar{4}2m$ (sensurile de rotație după direcții perpendiculare situate în planul XY sînt opuse); b — suprafața ce caracterizează activitatea optică pe o direcție dată în cristalele din clasa 222, pentru valori ale coeficienților $\rho_{11}=-\rho_{22}\neq\rho_{33},\rho_{33}>0$.

61, a și 63*. Efectul transversal apare la cristalele celor 10 clase piroelectrice. Tensorii corespunzători acestui fenomen sînt analogi tensorilor dați în partea dreaptă a tabelului 19.

Numărul total de clase de cristale care rotesc planul de polarizare este egal cu 18 (15 clase din tabelul 20 și trei clase noi — $6mm$, $4mm$, $3m$ — din tabelul 19)**. Toate aceste clase de cristale nu au centru de simetrie (sînt polare și polar-neutre). Din punctul de vedere adoptat pentru descrierea rotirii planului de polarizare al luminii, numai la trei clase cristalografice fără centru de simetrie — și anume, clasele $\bar{4}3m$, $\bar{6}m2$ și $\bar{6}$ — nu apare rotirea planului de polarizare.

Totuși, este posibil și un alt mod de punere a problemei. Ne amintim că în §1.3 a fost analizată simetria direcțiilor rotite (direcții subordonate ca simetrie grupului $\infty 2$) și s-a arătat că aceste direcții există în *toate* clasele polare și polar neutre, deci și în clasele $\bar{4}3m$, $\bar{6}m2$, $\bar{6}$ (vezi tabelul 7 și Anexa I). Întrucît direcțiile rotite au aceeași simetrie ca și direcțiile activității

---

* Figura 63 trebuie tratată, în acest caz, în ordine inversă: cei doi vectori polari $\mathbf{j}$ și $\mathbf{j}'$ „compunîndu-se" conduc la o nouă direcție de polarizare, care se consideră drept *rotație* (vector axial), în raport cu cea inițială.

** Vezi, de asemenea: Feodorov, F. I. *Optica mediilor anizotrope*, Editura Academiei de științe a R.S.F. Bielorusă, Minsk, 1958.

optice, se poate conchide că activitatea optică (chiar fără considerarea efectelor legate de interacţiunea vectorului E al undei electromagnetice cu polarizarea electrică spontană) este posibilă în toate clasele cristalografice, cu excepţia celor centrosimetrice. Să observăm în acest caz că nu pentru toate direcţiile subordonate ca simetrie grupului $\infty 2$ (622, 422, 32, 222, 1/2, 6, 4, 3, 2, 1) există numai activitate optică. Mai înainte s-a arătat (vezi § 3.2, d) că direcţiile cu simetria 6, 4, 3, 2, 1 sînt caracterizate printr-o serie de proprietăţi.

Pe lîngă activitatea optică, în cristale poate apare şi *rotirea magnetică a planului de polarizare al lumii* (*efectul Faraday*). Rotirea magnetică a planului de polarizare se datoreşte interacţiunii cîmpului electric al undei luminoase cu cîmpul magnetic. În cazul cînd cîmpul magnetic este spontan, efectul Faraday este analog efectului Hall intern din punct de vedere al simetriei (vezi fig. 61, b). În particular, atunci cînd unda electromagnetică se propagă în sensul cîmpului magnetic, inversarea sensului acestui cîmp (întoarcerea cristalului magnetizat spontan) atrage după sine şi inversarea sensului de rotaţie a planului de polarizare (fig. 65). Astfel, fenomenul Faraday are simetria direcţiei

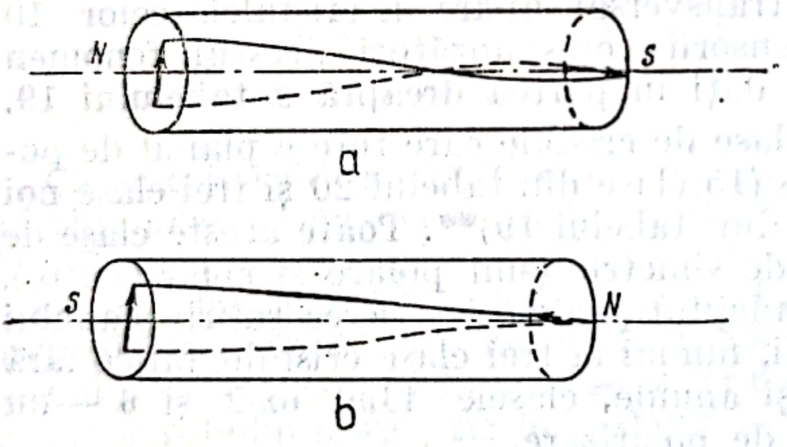


Fig. 65. Rotirea magnetică a planului de polarizare al luminii:
a — propagarea undei de la polul nord al magnetitului spre cel sud:
b — propagarea undei de la polul sud la cel nord.

axiale (unul din grupurile subordonate grupului ∞/m), iar activitatea optică — simetria direcţiei rotite (unul dintre grupurile subordonate grupului $\infty 2$). Pentru descrierea efectului Faraday, datorit magnetizării spontane, se poate folosi partea din stînga a tabelului 19.

3.4. FENOMENE FIZICE DESCRISE DE TENSORI DE ORDINUL TREI

Cu ajutorul tensorilor de ordinul trei se descriu fenomene datorite interacţiunii dintre tensori de ordinul doi şi vectori. Sînt

Scanned with OKEN Scanner

posibile următoarele combinaţii de tensori de ordinul doi şi vectori : 1) tensor polar-vector polar ; 2) tensor polar-vector axial) 3) tensor axial-vector polar ; 4) tensor axial-vector axial.

Prima şi a patra combinaţie conduc la un tensor polar de ordinul trei $[a_{ikl}]$, la care transformarea componentelor atunci cînd se transformă sistemul de coordonate se scrie sub forma

$$a'_{ikl} = c_{im}c_{kn}c_{lo}a_{mno} \tag{3.36}$$

unde a'_{ikl} sînt noile componente ; c_{im}, c_{kn}, c_{lo} — cosinuşii unghiurilor dintre axele vechilor şi noilor sisteme de coordonate (vezi § 1.4) ; a_{mno} — vechile valori ale componentelor.

A doua şi a treia combinaţie sînt descrise de tensori axiali de ordinul trei şi noile componente A'_{ikl} (după transformarea sistemului de coordonate) se exprimă cu ajutorul celor vechi A_{mno} în modul următor.

$$A'_{ikl} = \pm c_{im}c_{kn}c_{lo}A_{mno} \tag{3.37}$$

unde c_{im}, c_{kn}, c_{lo} sînt cosinuşii unghiurilor dintre vechile şi noile axe de coordonate. Semnul plus din expresia (3.37) se ia în cazul în care trecerea de la un sistem de coordonate la altul se realizează cu ajutorul doar a unor rotaţii simple (fără schimbarea semnului sistemului de coordonate ; în cazul rotaţiilor simple, sistemul dextrogir rămîne dextrogir, iar cel levogir — levogir). Semnul minus este luat în cazul cînd trecerea de la un sistem de coordonate la altul se realizează cu ajutorul rotaţiilor cu oglindire. Prin rotaţii cu oglindire (care includ şi inversarea sistemului de coordonate faţă de originea sa) sistemul îşi schimbă semnul : cel dextrogir devine levogir, iar cel levogir devine dextrogir. Această caracteristică a tensorilor axiali de ordinul trei este legată de faptul că tensorii axiali de ordinul doi şi vectorii axiali au, de asemenea, semnul minus, în formule analoge cu (3.36) şi (3.37) atunci cînd transformările sistemului de coordonate se fac cu schimbarea semnului (vezi tabelul 8). Într-adevăr, în cea de-a doua şi a treia combinaţie, cînd se schimbă semnul sistemului de coordonate, în formulele de transformare a componentelor se schimbă doar semnul uneia dintre mărimi (componentele tensorului de ordinul trei ascultă de relaţia (3.37), cu alte cuvinte tensorul este axial).

În cazul general, un tensor de ordinul trei are $3^3 = 27$ componente independente. Considerînd un anumit fenomen care

Scanned with OKEN Scanner

condiționează interacțiunea vectorului **P** cu tensorul de ordinul doi $[h_{kl}]$*, vom avea

$$P_i = a_{ikl} h_{kl}. \qquad (3.38)$$

Sub formă tensorială această ecuație se poate scrie

	h_{11}	h_{22}	h_{33}	h_{23}	h_{32}	h_{31}	h_{13}	h_{12}	h_{21}
P_1	a_{111}	a_{122}	a_{133}	a_{123}	a_{132}	a_{131}	a_{113}	a_{112}	a_{121}
P_2	a_{211}	a_{222}	a_{233}	a_{223}	a_{232}	a_{231}	a_{213}	a_{212}	a_{221}
P_3	a_{311}	a_{322}	a_{333}	a_{323}	a_{332}	a_{331}	a_{313}	a_{312}	a_{321}.

(3.39)

Expresia (3.39) se simplifică dacă tensorul $[h_{kl}]$ este simetric. În calcule concrete se folosește cel mai des forma matriceală de scriere a expresiilor de tipul (3.39), în care caz mărimea h are doar un indice, iar a — doi indici. Pentru exemplul considerat

$$h_{11} = h_1;\ h_{22} = h_2;\ h_{33} = h_3;\ h_{32} = h_{23} = h_4;$$
$$h_{31} = h_{13} = h_5;\ h_{21} = h_{12} = h_3.$$

În aces caz tensorul (3.39) poate fi scris într-o formă mult mai compactă, matriceală

	h_1	h_2	h_3	h_4	h_5	h_6
P_1	a_{11}	a_{12}	a_{13}	a_{14}	a_{15}	a_{16}
P_2	a_{21}	a_{22}	a_{23}	a_{24}	a_{25}	a_{26}
P_3	a_{31}	a_{32}	a_{33}	a_{34}	a_{35}	a_{36}.

(3.40)

Compararea coeficienților tensorului (3.39) cu matricea (3.40) conduce la următoarele relații

$$a_{111} = a_{11};\ a_{122} = a_{12};\ a_{133} = a_{13};\ a_{132} = a_{123} = (1/2)a_{14};$$
$$a_{131} = a_{113} = (1/2)\,a_{15};\ a_{112} = a_{121} = (1/2)\,a_{16};$$
$$a_{211} = a_{21};\ a_{222} = a_{22};\ a_{233} = a_{23};\ a_{232} = a_{223} =$$
$$= (1/2)\,a_{24};\ a_{231} = a_{213} = (1/2)\,a_{25};\ a_{212} = a_{221} =$$
$$= (1/2)\,a_{26};\ a_{311} = a_{31};\ a_{322} = a_{32};\ a_{333} = a_{33};$$
$$a_{323} = a_{332} = (1/2)\,a_{34};\ a_{313} = a_{331} = (1/2)\,a_{35};$$
$$a_{312} = a_{321} = (1/2)\,a_{36}. \qquad (3.41)$$

*Aici nu are importanță cine sînt axiali sau polari: **P** sau $[h_{kl}]$.

Scanned with OKEN Scanner

În formă condensată, expresia (3.40) devine

$$P_n = a_{nj} h_j \quad (n = 1,2,3\,;\ j = 1,\ 2,\ldots,6). \tag{3.42}$$

În continuare se vor analiza caracteristicile simetriei unor fenomene descrise de tensori polari și axiali de ordinul trei.

a) EFECTUL PIEZOELECTRIC

La unele cristale, sub acțiunea tensiunilor mecanice (tensorul $[t_{ij}]$) sau a deformațiilor (tensorul $[r_{ij}]$) apare o polarizare electrică (vectorul **P**) sau un cîmp electric (vectorul **E**). Acest feomen se numește *efect piezoelectric direct*. Aceleași cristale prezintă și *efect invers* — capacitatea de a se deforma sub acțunea cîmpului electric.

În cazul general, legătura dintre mărimile **P**(**D**), **E**, [t], [r] se stabilește cu ajutorul celor patru *coeficienți piezoelectrici*. Toți acești coeficienți, legînd vectori polari și tensori polari, sînt tensori polari de ordinul trei. Să ne oprim la unul dintre ei, definit prin relația

$$P_i = d_{ijk} t_{jk} \tag{3.43}$$

care are următoarea scriere matriceală

$$P_i = d_{ij} t_j. \tag{3.43, a}$$

Mărimea d_{ij} se numește *modul piezoelectric*. Modulii piezoelectrici au, în cazul piezoelectricilor liniari, valoarea absolută de ordinul a 10^{-8} unități electrostatice.

Simetria cristalelor impune limitări asupra formei matricei coeficienților piezoelectrici. Aceste limitări se stabilesc analitic prin aceeași metodă prin care s-a determinat simetria tensorilor de ordinul doi (vezi § 1.4). Folosind formula (3.36), după transformarea sistemului de coordonate corespunzătoare unui element de simetrie al cristalului sau altuia, se găsesc valorile coeficienților. După o astfel de transformare se poate găsi că : a) coeficientul este egal cu sine însuși ($d' = d$) ; b) coeficientul este egal cu sine însuși în valoare absolută, dar are semn opus celui care l-a avut pînă la transformare ($d' = -d$) ; c) coeficientul este egal după transformare cu o combinație algebrică a celorlalți coeficienți inițiali. Limitările asupra formei tensorului, corespunzătoare acestor cazuri, vor fi următoarele : a) dacă $d' = d$, înseamnă că existența coeficientului diferit de zero nu contrazice simetria cristalului, cu alte cuvinte coeficientul

Scanned with OKEN Scanner

rămîne pe locul său în expresia tensorului; b) condiția $d' = -d$ înseamnă că egalitatea menționată este în acord cu simetria cristalului numai pentru o anumită valoare a lui d, și anume $d \equiv 0$; c) dacă, în fine, unul dintre coeficienți reprezintă o combinație a celorlalți, trebuie să se considere acest coeficient anume sub forma respectivei combinații. În acest caz valoarea coeficientului considerat nu va contrazice simetria cristalului.

Să analizăm ca exemplu concret aflarea matricei coeficienților d pentru clasa cristalografică 2. Luînd axa 2 drept axă Y a sistemului de coordonate cristalofizic, să scriem matricea cosinușilor corespunzătoare rotirii sistemului de coordonate cu unghiul de 180° în jurul axei Y

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{3.44}$$

Mai departe, folosind formulele de transformare ale componentelor tensorului de ordinul trei [vezi (3.36)], obținem (avînd în vedere că $d_{ijk} = d_{ikj}$)

$$\begin{gathered} d'_{111} = -d_{111};\quad d'_{122} = -d_{122};\quad d'_{133} = -d_{133};\quad d'_{131} = -d_{131}; \\ d'_{113} = -d_{113};\quad d'_{232} = -d_{232};\quad d'_{223} = -d_{223}; \\ d'_{212} = -d_{212};\quad d'_{331} = -d_{331};\quad d'_{311} = -d_{311}; \\ d'_{322} = -d_{322};\quad d'_{333} = -d_{333};\quad d'_{221} = -d_{221}; \\ d'_{313} = -d_{313}, \end{gathered}$$

precum și

$$\begin{gathered} d'_{132} = d_{132};\quad d'_{123} = d_{123};\quad d'_{121} = d_{121};\quad d'_{112} = d_{112}; \\ d'_{211} = d_{211};\quad d'_{222} = d_{222};\quad d'_{233} = d_{233};\quad d'_{231} = d_{231}; \\ d'_{213} = d_{213};\quad d'_{332} = d_{332};\quad d'_{323} = d_{323};\quad d'_{321} = d_{321}; \\ d'_{312} = d_{312}. \end{gathered}$$

Ținînd cont de relațiile (3.14) găsim că pentru clasa 2 matricea coeficienților piezoelectrici are forma

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & d_{14} & 0 & d_{16} \\ d_{21} & d_{22} & d_{23} & 0 & d_{25} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d_{34} & 0 & d_{36} \end{pmatrix} \tag{3.45}$$

și conține opt coeficienți independenți.

Scanned with OKEN Scanner

Rezultatele unui studiu analog pentru toate clasele de cristale şi texturi sînt date în tabelul 21. Din acest tabel rezultă că la 20 de clase cristalografice tensorii $[d]$ au coeficienţi diferiţi de zero. Astfel, piezoelectricitatea este posibilă la următoarele clase de cristale : $\bar{4}3m$, 23, $\bar{6}m2$, 622, $\bar{6}$, $6mm$, 6, $3m$, 32, 3, $\bar{4}2m$, 422, $4mm$, $\bar{4}$, 4, 222, $mm2$, m, 2, 1. Aici intră toate clasele cristalelor polare şi toate (cu excepţia uneia) clasele de cristale polar-neutre. Excepţia o reprezintă clasa 432.

Referitor la problema : care clase de cristale au piezoelectricitate, se poate urma şi o altă abordare. Vom remarca faptul că, dacă în urma unei acţiuni mecanice în cristal apare polarizare electrică, direcţia după care este orientată această polarizare devine polar privilegiată. De aici rezultă imediat că pentru a răspunde la problema : este, în general (în principiu), posibilă polarizarea unui cristal datorită efectului piezoelectric, este suficient să se stabilească (pe baza principiului Curie) dacă cristalul respectiv poate sau nu să aparţină (după deformaţie) — din punct de vedere al simetriei — la unul dintre grupurile subordonate grupului ∞mm. Acest grup este acela care descrie simetria unui vector polar, deci şi a vectorului polarizare electrică. Asemenea grupuri se numesc polare sau piroelectrice (vezi § 1.3, b).

O acţiune centrală (tensorul deformaţiilor şi al tensiunilor are centru de simetrie), oricare ar fi orientarea ei, nu poate să înlăture centrul de simetrie al cistalelor centrosimetrice (11 clase) : 1, $2/m$, mmm, $4/m$, $4/mmm$, $\bar{3}$, $\bar{3}m$, $6/m$, $6/mmm$, $m3$, $m3m$. Prezenţa în sine, a centrului de simetrie exclude posibilitatea existenţei nu numai a direcţiilor polare privilegiate, ci chiar şi a unor direcţii polare simple. Astfel, în cristalele centrosimetrice nu este posibil efectul piezoelectric.

Vom împărţi celelalte 21 clase de cristale rămase în afara discuţiei în două grupuri. În prima dintre ele includem cristalele polar neutre ale claselor 222, $\bar{4}$, 422, $\bar{4}2m$, 32, $\bar{6}$, 622, $\bar{6}m2$, 23, 432, $\bar{4}3m$. Apariţia piezopolarizării la cristalele polar neutre poate fi considerată drept rezultat al decompensării dipolilor existenţi. Pentru aceste clase de cristale, aşa cum arată studiile făcute, se poate găsi o astfel de orientare reciprocă a cristalului şi acţiunii exterioare încît ea să permită trecerea cristalului într-unul dintre grupurile polare (fig. 66). În general, prin această modalitate se poate nu numai stabili faptul că apare polarizare piezoelectrică la o clasă dată de cristale, ci şi găsi care dintre coeficienţii piezoelectrici este diferit de zero (fig. 67).

Scanned with OKEN Scanner

Tabelul 21

Formele matricelor modulilor piezoelectrici (tensori polari de ordinul trei)

Clasele de simetrie ale cristalelor și texturilor	Forma matricei	Nr. coeficienților independenți	Simetria tensorului	Clasele de simetrie ale cristalelor și texturilor	Forma matricei	Nr. coeficienților independenți	Simetria tensorului
$\bar{4}3m$, 23	$\begin{matrix} 0 & 0 & 0 & d_{14} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & d_{14} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & d_{14} \end{matrix}$	1	$\bar{4}3m$	3	$\begin{matrix} d_{11} & -d_{11} & 0 & d_{14} & d_{15} & -2d_{22} \\ -d_{22} & d_{22} & 0 & d_{15} & d_{14} & -2d_{11} \\ d_{31} & d_{31} & d_{33} & 0 & 0 & 0 \end{matrix}$	6	3
622, 422, $\infty 2$	$\begin{matrix} 0 & 0 & 0 & d_{14} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -d_{14} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix}$	1	$\infty 2$	$\bar{4}2m$	$\begin{matrix} 0 & 0 & 0 & d_{14} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & d_{14} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & d_{36} \end{matrix}$	2	$\bar{4}2m$
$6mm$, $4mm$ ∞mm	$\begin{matrix} 0 & 0 & 0 & 0 & d_{15} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d_{15} & 0 & 0 \\ d_{31} & d_{31} & d_{33} & 0 & 0 & 0 \end{matrix}$	3	∞mm	$\bar{4}$	$\begin{matrix} 0 & 0 & 0 & d_{14} & d_{15} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -d_{15} & d_{14} & 0 \\ d_{31} & -d_{31} & 0 & 0 & 0 & d_{36} \end{matrix}$	4	$\bar{4}$
$\bar{6}m2$	$\begin{matrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -d_{22} \\ -d_{22} & d_{22} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix}$	1	$\bar{6}m2$	222	$\begin{matrix} 0 & 0 & 0 & d_{14} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & d_{25} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & d_{36} \end{matrix}$	3	222
6, 4, ∞	$\begin{matrix} 0 & 0 & 0 & d_{14} & d_{15} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d_{15} & -d_{14} & 0 \\ d_{31} & d_{31} & d_{33} & 0 & 0 & 0 \end{matrix}$	4	∞	$mm2$	$\begin{matrix} 0 & 0 & 0 & 0 & d_{15} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d_{24} & 0 & 0 \\ d_{31} & d_{32} & d_{33} & 0 & 0 & 0 \end{matrix}$	5	$mm2$
$\bar{6}$	$\begin{matrix} d_{11} & -d_{11} & 0 & 0 & 0 & -2d_{22} \\ -d_{22} & d_{22} & 0 & 0 & 0 & -2d_{11} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix}$	2	$\bar{6}$	m	$\begin{matrix} d_{11} & d_{12} & d_{13} & 0 & 0 & d_{16} \\ d_{21} & d_{22} & d_{22} & 0 & 0 & d_{26} \\ 0 & 0 & 0 & d_{34} & d_{35} & 0 \end{matrix}$	10	m
32	$\begin{matrix} d_{11} & -d_{11} & 0 & d_{14} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -d_{14} & -2d_{11} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix}$	2	32	2	$\begin{matrix} 0 & 0 & 0 & d_{14} & d_{15} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d_{24} & d_{25} & 0 \\ d_{21} & d_{32} & d_{33} & 0 & 0 & d_{36} \end{matrix}$	8	2
$3m$	$\begin{matrix} 0 & 0 & 0 & 0 & d_{15} & -2d_{22} \\ -d_{22} & d_{22} & 0 & d_{15} & 0 & 0 \\ d_{31} & d_{31} & d_{33} & 0 & 0 & 0 \end{matrix}$	4	$3m$	1	$\begin{matrix} d_{11} & d_{12} & d_{13} & d_{14} & d_{15} & d_{16} \\ d_{21} & d_{22} & d_{23} & d_{24} & d_{25} & d_{26} \\ d_{31} & d_{32} & d_{33} & d_{34} & d_{33} & d_{36} \end{matrix}$	18	1

Scanned with OKEN Scanner

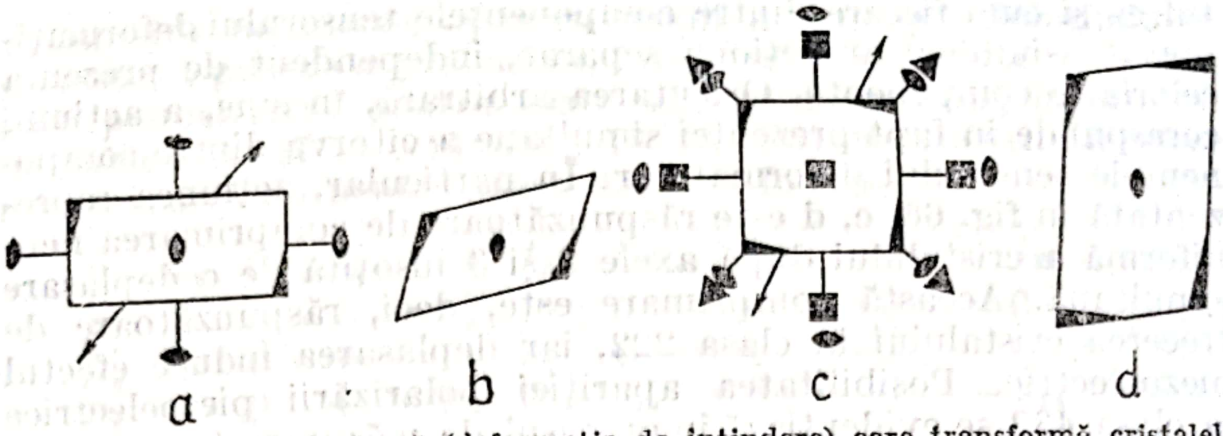


Fig. 66. Acțiune exterioară (deformație de întindere) care transformă cristalele din clase polar-neutre în clase polare: un cristal din clasa 222 (a) se transformă în cristal din clasa 2(b); un cristal din clasa 432 (c) se transformă în cristal din clasa 2 (d).

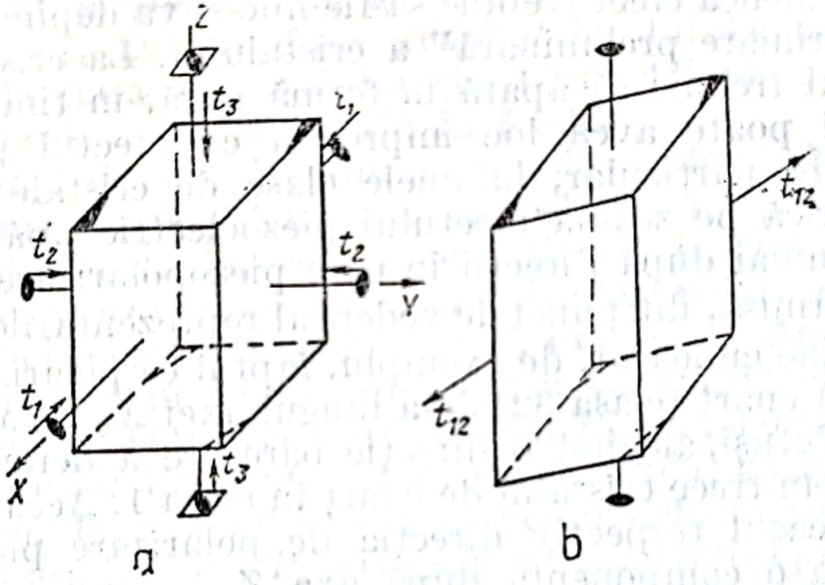


Fig. 67. La cristalele din clasa $\bar{4}2m$ tensiunile normale t_1 și t_2 produc coborîrea simetriei pînă la 222, iar tensiunile t_3 fac să se conserve simetria (a). De aici, rezultă că modulii d_{11}, d_{12}, d_{13}, d_{21}, d_{22}, d_{23}, d_{31}, d_{32} și d_{33} ai unui asemenea cristal sînt egali cu zero. Tensiunile de deplasare t_{12}, t_{23} și t_{13} modifică simetria cristalului pînă la 2 (b). În lungul axei 2 apare piezopolarizarea. Aceasta înseamnă că modulii d_{14}, d_{25} și d_{36} sînt diferiți de zero.

Prin urmare, toate cristalele polar neutre sînt piezoelectrice. Această concluzie este deosebit de interesantă pentru cristalele ce aparțin clasei 432 (fig. 66, c, d), care — din punct de vedere al reprezentărilor expuse mai înainte — nu sînt considerate piezoelectrice. Aceasta se întîmplă deoarece în considerațiile anterioare nu au fost luate în seamă efectele legate de modificarea simetriei cristalului ca rezultat al acțiunii exterioare aplicate lui. Astfel, tensorii de forma (3.45) descriu piezoefec-

tul ca și cum fiecare dintre componentele tensorului deformațiilor (tensiunilor) ar acționa separat, independent de prezența celorlalte componente. Orientarea arbitrară, în sine, a acțiunii corespunde în fapt prezenței simultane a cîtorva dintre componentele tensorului deformațiilor. În particular, acțiunea reprezentată în fig. 66, c, d este răspunzătoare de comprimarea neuniformă a cristalului după axele 2 și 3 însoțită de o deplasare simultană. Această comprimare este, deci, răspunzătoare de trecerea cristalului în clasa 222, iar deplasarea induce efectul piezoelectric. Posibilitatea apariției polarizării piezoelectrice la clasa 432 se evidențiază în procesul de măsurare (experimental). Din cele spuse rezultă că efectul piezoelectric la cristalele clasei 432 este destul de special și poate fi considert ca un fel de efect „pătratic".

Un asemenea efect trebuie să fie mic și va depinde de gradul de „comprimare preliminară" a cristalului. La cristalele clasei 432 efectul trebuie să apară în formă pură, în timp ce la alte cristale el poate avea loc împreună cu efectul piezoelectric obișnuit. În particular, la unele clase de cristale polarizarea piezoelectrică pe seama efectului piezoelectric „pătratic" este posibilă numai după direcții în care piezopolarizarea obișnuită nu este permisă, din punct de vedere al reprezentărilor adoptate.

Este bine cunoscut, de exemplu, faptul că polarizarea piezoelectrică la cuarț (clasa 32) de-a lungul axei X_3 (axa Z) nu este posibilă. Totuși, alegînd o direcție oarecare a deformațiilor în cuarț, putem trece cristalul de cuarț în clasa 1. Aceasta înseamnă că în cazul respectiv direcția de polarizare piezoelectrică poate avea o componentă după axa Z.

S-a conceput o experiență specială pentru detectarea polarizării după axa Z, la cuarț. În acest scop, la o probă de cuarț cubic, tăiată perpendicular pe axele X (electrică), Y (mecanică) și Z (optică), s-au efectuat tăieturi pe fețe opuse, de orientare generală $(hkil)$ și $(\bar{h}\bar{k}\bar{i}\bar{l})$. Cînd s-a comprimat cubulețul obținut după aceste fețe s-a observat o polarizare piezoelectrică după axa Z a cuarțului și s-a determinat „piezomodulul" d_{33} $(hkil)$, care era — pentru această tăietură — egal cu $1{,}5 \cdot 10^{-8}$ unități electrostatice*.

Piezoelectricitatea cristalelor din clasa 432 a fost dovedită nu demult și de pe alte poziții de către Laval și Raman, care au considerat că în cazul general tensorii deformațiilor și tensi-

---

* Jeludev, I. S., *Simetria și proprietățile piezoelectrice ale cristalelor*, Czeh. J. Phys. B, **16**, 386, 1966.

Scanned with OKEN Scanner

unilor sînt nesimetrici pentru medii anizotrope. Folosindu-se de această punere a problemei, Le Core* a găsit forma tensorilor piezoelectrici pentru toate clasele de cristale, întocmind un tablou cu 27 (3×9) şi nu 18 (3×6) coeficienţi. În acest caz, tensorul d_{ij} pentru clasa 432 are forma

	t_{11}	t_{22}	t_{33}	t_{23}	t_{31}	t_{12}	t_{32}	t_{13}	t_{21}
P_1	0	0	0	d_{14}	0	0	$-d_{14}$	0	0
P_2	0	0	0	0	d_{14}	0	0	$-d_{14}$	0
P_3	0	0	0	0	0	d_{14}	0	0	$-d_{14}$

(3.46)

şi se transformă în tensorul zero atunci cînd $t_{ik} = t_{ki}$. Trebuie, totuşi, să facem o deosebire între rezultatele obţinute de Le Core şi cele expuse aici, în această carte, pentru clasa 432. Noi am considerat piezoelectrică această clasă şi pentru tensorul simetric $t_{ik} = t_{ki}$. Dar, conform rezultatelor lui Le Core piezopolarizarea la clasa 432 se datoreşte nesimetricităţii tensorului $[t]$ (care, de fapt, a fost discutată în § 3.2.)

Este destul de simplu (din punct de vedere al simetriei) de înţeles cum apare polarizarea piezoelectrică la cristalele polare. Spre deosebire de ceea ce se întîmplă la cristalele polar neutre, polarizarea piezoelectrică la cristalele polare este rezultatul variaţiei polarizării spontane P_s existente. Această variaţie poate consta în modificarea atît a valorii absolute, cît şi a sensului lui P_s. Totuşi, modificarea lui P_s nu poate fi obţinută în toate cazurile. Este interesant, de exemplu, că la cristalele claselor $6mm$, $4mm$ şi altele se poate da o deformaţie de deplasare pură în aşa fel încît P_s nu se schimbă. Modulul piezoelectric corespunzător deformaţiei este egal cu zero.

Un caz particular de efect piezoelectric este polarizarea piezoelectrică a cristalelor polare (piroelectrice) atunci cînd se produce o comprimare din toate direcţiile. Dacă luăm drept direcţie polară privilegiată în cristal — axa Z, atunci în cazul general cîmpul electric care produce o comprimare (destindere) hidrostatică se determină cu relaţia

$$E_{hidrost} = (d_{31} + d_{32} + d_{33})\, p = d_{hidrost}\, p \qquad (3.47)$$

unde p reprezintă presiunea hidrostatică.

Pentru cristalele ce aparţin grupului 2 [vezi tensorul (3.45)] la care axa 2 coincide cu axa Y, expresia (3.47) va avea forma

$$E_{hidrost} = (d_{21} + d_{22} + d_{23})\, p.$$

* Le Core, *Constantes Elastiques et Piezoélectriques Cristallines*, Bul. Soc. Franc. Miner. Crist, 76, 464,1953

Scanned with OKEN Scanner

Determinînd din experienţe mărimea $d_{hidrost}$ şi cunoscînd constantele elastice ale cristalului se poate găsi polarizarea spontană P_s a piroelectricilor liniari. Măsurătorile efectuate* au arătat că pentru asemenea cristale polarizarea spontană are ordinul de mărime $10^{-5}C \cdot cm^{-2}$, ceea ce este apropiat de valoarea lui P_s pentru segnetoelectrici.

În cazul efectului piezoelectric invers, piezomodulul d_{ikl} descrie deformaţiile $[r]$, care apar sub influenţa cîmpului electric E**

$$r_{kl} = d_{ikl}E_i. \tag{3.48}$$

Sub formă matriceală, relaţia este

$$\begin{array}{cccc} & E_1 & E_2 & E_3 \\ r_1 & d_{11} & d_{21} & d_{31} \\ r_2 & d_{12} & d_{22} & d_{32} \\ r_3 & d_{13} & d_{23} & d_{33} \\ r_4 & d_{14} & d_{24} & d_{34} \\ r_5 & d_{15} & d_{25} & d_{35} \\ r_6 & d_{16} & d_{26} & d_{36} \end{array} \tag{3.48b}$$

Forma matricei coeficienţilor piezoelectrici pentru efectul piezoelectric direct şi invers este aceeaşi pentru o clasă dată de cristale.

Particularităţile (caracteristicile) efectului piezoelectric invers, analoge celor pe care le-am menţionat în cazul efectului piezoelectric direct, nu sînt atît de distincte. Astfel, tn cazul efectului direct piezopolarizarea cristalului se produce ţîotdeauna cînd, în urma unei acţiuni din afară, apare o direceie polară privilegiată. Totuşi, aplicarea unui cîmp electric mtren face ca oricare direcţie, din orice cristal (chiar centrosixetric), să fie polară privilegiată. Deformaţia, însă, care este proporţională cu cîmpul, apare numai atunci cînd cîmpul se aplică după anumite direcţii, determinate. La un cristal din clasa 422, de exemplu, aplicarea cîmpului de-a lungul axei 4 face ca această axă să devină polară privilegiată, dar deformaţia piezoelectrică, datorită aplicării cîmpului electric, după această direcţie lipseşte. În cazul considerat axa 4 nu este polară în starea iniţială, dar aceasta nu înseamnă că polarizarea piezo-

* Jeludev, I. S., Taghieva, M. N., *Polarizarea electrică a cristalelor piroelectricilor în cazul comprimării* (destinderii) *uniforme*, Kristalografia, **7**, 589, 1962.

** Mărimile $[l]$ şi E din efectul piezoelectric invers sînt legate prin coeficienţii $[e_{ijk}]$.

Scanned with OKEN Scanner

electrică a cristalelor se produce numai atunci cînd cîmpul este aplicat după direcţia polară. Într-adevăr, la cristalele clasei $\bar{4}3m$, axa $\bar{4}$ de asemenea nu este polară, însă aplicarea cîmpului după această direcţie conduce la o deformaţie piezoelectrică. La cristalele piroelectrice (polare) apare o deformaţie piezoelectrică după oricare dintre direcţiile cîmpului electric. Exemple în acest sens sînt date în fig. 68.

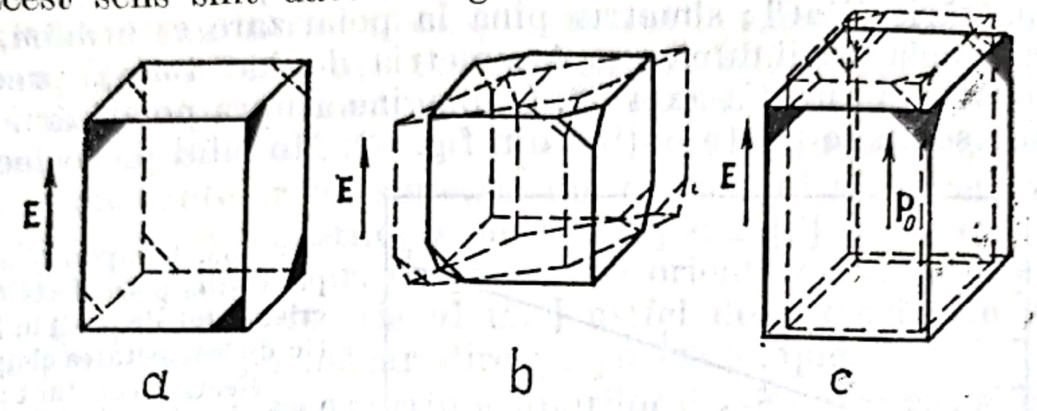


Fig. 68. Efectul piezoelectric invers la cristale:

a — cîmpul **E** în clasa 422 face ca axa 4 să fie polară privilegiată dar nu conduce la deformaţie piezoelectrică; b — cîmpul **E** în clasa $\bar{4}3m$ este aplicat în lungul unei direcţii nepolare, dar conduce la deformaţie piezoelectrică; c — cîmpul **E** aplicat de-a lungul direcţiei polare privilegiate în clasa 4 conduce la deformarea piezoelectrică a cristalului.

Efectul piezoelectric invers nu are acelaşi specific ca efectul piezoelectric direct: el poate fi analizat detaliat pe exemplul cristalelor din clasa 432. Aceasta înseamnă că din considerentele de simetrie nu decurge posibilitatea apariţiei efectului piezoelectric invers la cristalele clase 432 sau a corecţiilor „pătratice" la coeficienţii piezoelectrici, pentru nici o orientare a cîmpului extren. Această afirmaţie se referă la corecţiile „pătratice" înţelese în sensul menţionat mai înainte. În cazul unor astfel de corecţii, inversarea cîmpului ar trebui să conducă la schimbarea semnului deformaţiei cristalului (prin aceasta se caracterizează efectul piezoelectric invers); totuşi, la cristalele clasei 432, şi în cazuri speciale pentru celelalte cristale, nu se întîmplă aşa, analog cu ceea ce s-a arătat pentru cuarţ. Pe lîngă aceasta, în cazul efectului piezoelectric invers apar în mod real corecţii pătratice la coeficienţii piezoelectrici, corecţii care se datoresc *electrostricţiunii*. Electrostricţiunea, după cum se ştie, apare la toate cristalele şi texturile, inclusiv la cristalele de cuarţ, la cristalele ce aparţin grupului 432 şi la cristalele centrosimetrice.

De pe poziţiile teoriei Laval-Raman, efectul piezoelectric invers este posibil la cristalele din clasa 432 [vezi tensorul (3.46)], dar el se datoreşte nesimetricităţii tensorilor $[r]$ şi $[t]$.

Mai înainte s-a observat că aplicarea cîmpului electric trece orice cristal într-o clasă polară. Aceasta înseamnă că şi cristalele centrosimetrice devin piezoelectrice în cîmp electric constant. Valoarea coeficienţilor lor piezoelectrici va depinde, în acest caz, de valoarea cîmpului. Folosind aceste reprezentări, se poate măsura efectul piezoelectric invers (cu ajutorul unei aparaturi de sensibilitate înaltă) în cristalele polarizate ale sării de bucătărie (NaCl ; simetria pînă la polarizare este $m3m$, iar în urma polarizării după axa 4 simetria devine $4mm$), precum şi la cuarţ, în direcţia axei Z*. O imagine asupra polarizării clorurii de sodiu se poate obţine din fig. 69. Modulul piezoelectric

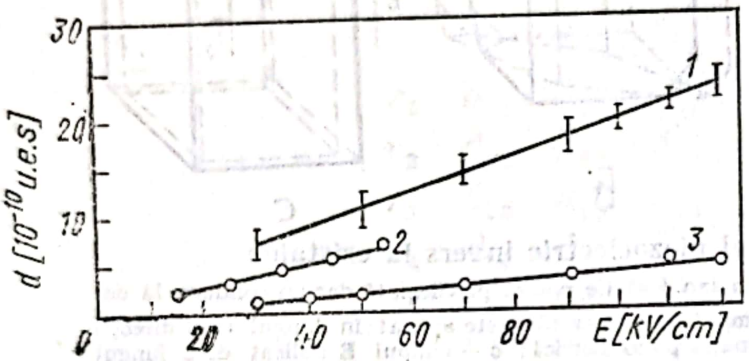


Fig. 69. Comportarea proprietăţilor piezoelectrice ale cristalului de NaCl în funcţie de intensitatea cîmpului electric constant : 1 — piezomodelul d_{33} — 2 — piezomodulul d_{31}; 3 — piezomodulul d'_{33} (deplasare în direcţia [111]).

d'_{33} al cuarţului este de aproximativ $4 \cdot 10^{-10}$ unităţi electrostatice, la un cîmp aplicat $E_3 \approx 100$ kV/cm. De aici rezultă că obţinerea modulului piezoelectric, egal cu modul d_{11}, de-a lungul tăieturii Z a cuarţului (la cuarţ $d_{11} \approx 6{,}8 \cdot 10^{-8}$ unităţi electrostatice) ar necesita aplicarea unui cîmp de ordinul a 10^7 V/cm.

Nu numai cristalele pot avea proprietăţi piezoelectrice, ci şi texturile, adică conformaţii care conţin particule de natură diferită, ordonate după legile simetriei**. Cele mai simple texturi, numite texturi *piezoelectrice*, constau din monocristale orientate, care formează un policristal. În general, texturile pot avea orice simetrie (bineînţeles, şi necristalină). Totuşi, dacă ne limităm la acţiuni aplicat unui mediu omogen, descrise de tensori de ordinul doi, grupul de simetrie al texturii va coincide cu grupurile de simetrie ale mediilor continue omogene, analizate în capitolul 1. Dintre asemenea texturi prezintă un interes deosebit numai

---

* Jeludev, I. S., Fotcenkov, A. A., *Electrostricţiunea dielectricilor liniari*, Kristalografia, **3**, 308, 1958.

* Şubnikov, A. V. *Texturi piezoelectrice*, Editura Academiei de Ştiinţe e U.R.S.S., Moscova, 1940; Şubnikov, A. V., Jeludev, I. S., Konstantinova, V. P., Silvestrova, I. M., *Studierea texturilor piezoelectrice* Editura Academiei de Ştiinţe a U.R.S.S., 1953; Jeludev, I. S., *Cristale electrice* (traducere din limba rusă), Editura tehnică, Bucureşti, 1973; Zheludev, I. S., *Piezoeldctricity in textured media*, Solid state physics, **29**, 315, 1974.

cele aparţinînd grupurilor necristalografice, adică texturile care au simetria descrisă de grupurile limită Curie : $\infty/\infty/mmm$, $\infty/\infty 2$, ∞/mmm, ∞/m, $\infty 2$, ∞mm, ∞.

Grupurile $\infty/\infty/mmm$, ∞/mmm, ∞/m nu prezintă interes din punct de vedere al apariţiei polarizării piezoelectrice, deoarece texturile care aparţin acestor grupuri nu permit o polarizare piezoelectrică sub influenţa acţiunilor centrosimetrice.

Studiul analitic arată că şi la texturile care aparţin grupului de simetrie $\infty/\infty 2$ toţi coeficienţii piezoelectrici sînt egali cu zero, cu toate că acestea nu sînt centrosimetrice. Aici (spre deosebire de clasa 432) nu este posibil de găsit o asemenea orientare a elementelor de simetrie ale cristalului şi a elementelor de simetrie ale tensorilor simetrici $[t]$ sau $[r]$ încît textura să treacă în grupul polar. Oricare ar fi orientarea acţiunii exterioare, grupul de simetrie al unei astfel de texturi este $\infty 2$ şi acesta nu are nici măcar direcţii polare simple.

La texturile care aparţin grupurilor de simetrie $\infty 2$ şi ∞mm, tensorii piezoelectrici au coeficienţii diferiţi de zero. Matricea coeficienţilor texturii $\infty 2$ coincide cu matricele coeficienţilor claselor 622 şi 422, ai texturii ∞mm — matricele coeficienţilor claselor $6mm$ şi $4mm$, ai texturii ∞ —cu matricele coeficienţilor claselor 6, 4 (vezi tabelul 21). Este interesant că la o textură care are simetria $\infty 2$ nu există direcţii polare (şi, cu atît mai mult, polare privilegiate). Cu toate acestea, tensiunile de deplasare fac ca una dintre axele 2 ale acestei texturi să devină polară privilegiată şi, ca urmare, în direcţia respectivei axe se produce polarizare piezoelectrică (fig. 70).

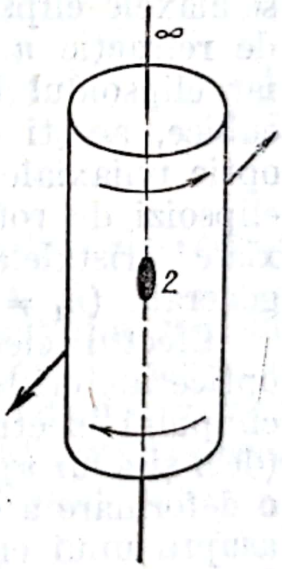


Fig. 70. Într-o textură cu simetria $\infty 2$ nu există direcţii polare, însă tensiunile de deplasare conduc la apariţia unei direcţii polare privilegiate după una dintre axele 2, după care se şi orientează piezopolarizarea.

Proprietăţile piezoelectrice au fost descoperite la materiale lemnoase texturate natural (grupul $\infty 2$), la unele roci (de exemplu, la cele care conţin cuarţ, cel mai probabil este grupul de simetrie ∞mm), la oasele animalelor (grupul ∞). Segnetoelectricii policristalini anorganici (de exemplu, titanatul de bariu, $BaTiO_3$) formează, după polarizare în cîmp electric, piezotexturi cu simetria ∞mm. Dînd o anumită orientare de cristalizare sării Seignette, din monocristalele ei se obţine uşor o textură cu simetria $\infty 2$.

Unele smoale organice şi unele cristale anorganice (care nu au polarizare spontană) se polarizează în cîmp electric intens şi îşi conservă polarizarea multă vreme. Asemenea substanţe se numesc *electreţi*. Mediile omogene vor avea în cîmp electric grupul de simetrie ∞mm sau ∞ şi vor prezenta proprietăţi piezoelectrice*.

b) EFECTUL ELECTROOPTIC LINIAR (EFECTUL POCKELS)

Cele spuse în § 3.2,e asupra caracteristicilor polarizării dielectricilor pot fi folosite pentru descrierea proprietăţilor optice ale cristalelor. Într-adevăr, procesul de propagare (şi de refracţie) a luminii, ca undă electromagnetică, într-un cristal reprezintă un proces în care normala la frontul undei este perpendiculară pe vectorul inducţie electrică **D**, iar normala la raza luminoasă este perpendiculară pe vectorul intensitate a cîmpului electric **E** (fig. 57). Orientarea reciprocă a vectorilor **D** şi **E** determină *caracterul refracţiei luminii*. La cristalele care au numai polarizare electronică, între constanta dielectrică ε şi *indicele de refracţie* există relaţia $n^2 = \varepsilon$, din care rezultă că semiaxele elipsoidului exterior din fig. 57 sînt egale cu indicii de refracţie n. Acest elipsoid se numeşte *elipsoidul indicilor*, iar elipsoidul interior — *elipsoidul Fresnel*. În cazul cristalelor cubice, aceşti elipsoizi sînt sfere ($n_1 = n_2 = n_3$), la cristalele optic uniaxiale (adică la cristalele din sistemele mijlocii) sînt elipsoizi de rotaţie ($n_1 = n_2 \neq n_3$), iar la cristalele optic biaxiale (cristalele sistemelor inferioare) sînt elipsoizi de formă generală ($n_1 \neq n_2 \neq n_3$).

Efectul electrooptic constă în modificarea proprietăţilor optice ale cristalelor sub influenţa cîmpului electric. Aplicarea cîmpului electric determină variaţia permitivităţii dielectrice (deci şi a lui n) a cristalelor, care poate fi tratată intuitiv drept o deformare a elipsoizilor optici. Astfel, cîmpul electric aplicat asupra unui cristal cubic face ca acesta să devină din optic izotrop — optic uniaxial (în acest caz, o sferă se transformă în elipsoid de rotaţie). În cazul cristalelor din sistemele mijlocii, dacă nu se aplică cîmpul în direcţia axei de rotaţie a elipsoidului, atunci cristalul va deveni din optic uniaxial—optic biaxial (elipsoidul se tranformă din biaxial în triaxial).

Pentru descrierea efectului electrooptic se stabilesc relaţii analitice între aşa-numitele constante de polarizare a şi cîmp,

* Jeludev, I. S., *Cristale electrice* (traducere din limba rusă), Editura tehnică, Bucureşti, 1973.

Scanned with OKEN Scanner

nu între indicii de refracţie şi cîmp. Mărimile a şi n sînt corelate astfel

$$a = 1/n^2. \tag{3.49}$$

Din relaţia (3.49) se vede că la substanţele care au polarizare electronică

$$a = 1/\varepsilon. \tag{3.50}$$

În cazul mediilor izotrope (între care şi cristalele cubice) mărimea a este aceeaşi în toate direcţiile, adică este un scalar. La mediile anizotrope, însă, mărimea a (şi, de asemenea, n) este un tensor polar de ordinul doi $[a_{ij}]$. La descrierea proprietăţilor electrooptice ne vom mărgini la cazurile în care tensorii sînt simetrici.

Sub influenţa cîmpului electric extern **E** constantele de polarizare a_{ij} capătă o creştere Δa_{ij}. La descrierea efectului electrooptic *liniar* se consideră creşterile constantelor de polarizare proporţionale cu puterea întîi a cîmpului

În cazul general (pentru cristalele sistemelor inferioare), în sistemul de coordonate principal au loc relaţiile

$$\begin{gathered} a_1^0 = 1/n_1^2;\ a_2^0 = 1/n_2^2;\ a_3^0 = 1/n_3^2; \\ a_4^0 = 0;\ a_5^0 = 0;\ a_6^0 = 0 \end{gathered} \tag{3.51}$$

indicele zero arătînd că s-a ales sistemul principal de coordonate.

Ca rezultat al aplicării cîmpului elipsoidul iniţial al indicilor se poate deforma în aşa fel încît noul său sistem principal de coordonate să nu mai coincidă cu cel vechi. Notînd cu a_i valorile constantelor de polarizare referitoare la sistemul iniţial de coordonate, obţinem următoarea legătură între a^0, a_i şi Δa_i

$$\begin{gathered} a_1 - a_1^0 = \Delta a_1;\quad a_2 - a_2^0 = \Delta a_2; \\ a_3 - a_3^0 = \Delta a_3;\ a_4 = \Delta a_4;\ a_5 = \Delta a_5;\ a_6 = \Delta a_6. \end{gathered} \tag{3.52}$$

Trecerea de la un indice la doi se face după regula

$$a_1 = a_{11};\ a_2 = a_{22};\ a_3 = a_{33};\ a_4 = a_{23},\ a_5 = a_{31};\ a_6 = a_{12}.$$

Relaţii similare au loc şi pentru a_i şi Δa_i.

Scanned with OKEN Scanner

În modul acesta, ecuaţiile efectului electrooptic liniar se pot scrie sub forma

$$\Delta a_{ij} = r_{ijm} E_m \qquad (3.53)$$

Tensorul r_{ijm} este un tensor de ordinul trei, care coincide pe deplin (după forma matricei) cu tensorul coeficienţilor piezoelectrici d (vezi tabelul 21). Mărimea r se numeşte *coeficient al efectului electrooptic liniar*. Caracteristicile de simetrie ale efectului electrooptic liniar sînt complet analoge caracteristicilor efectului piezoelectric invers. Aceste două efecte se însoţesc unul pe altul totdeauna. Pot prezenta efect electrooptic cristalele a 20 de clase : $\bar{4}3m$, 23, $\bar{6}m2$, $6mm$, 622, $\bar{6}$, 6, $3m$, 32, 3, $\bar{4}2m$, $4mm$, 422, $\bar{4}$, 4, 222, $mm2$, m, 2, 1.

Din faptul că efectul electrooptic liniar este posibil numai la cristalele piezoelectrice rezultă că acest efect şi efectul piezoelectric invers se realizează în paralel în cristale. Aceasta implică cerinţa ca *la descrierea efectului electrooptic să se ţină seama de efectul piezooptic*, adică modificarea constantelor optice ca urmare a deformaţiilor induse de efectul piezoelectric invers. Modificarea constantelor de polarizare prin aplicarea cîmpului electric, modificare nelegată de efectul piezoelectric invers (adică de efectul piezoelectric), reprezintă efectul electrooptic liniar *real*. Prin urmare, efectul electrooptic liniar real este rezultatul numai al influenţei directe a cîmpului electric asupra sarcinii dielectricului, formată prin redistribuirea densităţii de orbite electronice ale particulelor ce-l compun. Există şi un efect electrooptic liniar *fals*, prin care se înţelege de obicei modificarea constantelor de polarizare datorită efectului piezoelectric invers (prin intermediul efectului piezooptic ; vezi § 3.5). Uneori efectul electrooptic real se mai numeşte şi *primar*, iar cel fals — *secundar*. Valorile absolute ale coeficienţilor pentru dielectricii liniari sînt de ordinul 10^{-8} unităţi electrostatice. Pentru segnetoelectrici (în particular, pentru KH_2PO_4) ordinul de mărime este 10^{-7} unităţi electrostatice*.

Pe lîngă fenomenele considerate, descrise de tensori polari de ordinul trei (piezoefectul, efectul electrooptic liniar), se pot menţiona şi altele, care trebuie să fie descrise tot de asemenea tensori. Vom indica, în particular, posibilitatea de modificare a activităţii optice a cristalelor sub influenţa cîmpului magnetic. Tensorul axial al activităţii optice $[\rho_{ij}]$ este legat în

---

* Jeludev, I. S., *Proprietăţile electrooptice ale cristalelor*, Uspehi fiz. nauk, 8, 253, 966.

acest caz de vectorul axial **H**. Acest fenomen nu trebuie confundat nici cu efectul Faraday (rotirea magnetică a planului de polarizare), nici cu activitatea optică obişnuită. Primul (efectul Faraday) are simetria ∞/m, iar cel de-al doilea $-\infty 2$ (vezi § 3.3). Activitatea optică a cristalelor sub acţiunea cîmpului magnetic este descrisă de un tensor polar de ordinul trei şi trebuie să aibă simetria indicată în tabelul 21. Acest fenomen are loc în toate cristalele claselor piezoelectrice.

Al doilea efect posibil, descris de un tensor iniţial de ordinul trei, constă în variaţia magnetizării cristalelor ca urmare a torsionării uniforme. Trebuie să existe, de asemenea, şi efectul invers celui menţionat — torsionarea (răsucirea) cristalelor sub acţiunea cîmpului magnetic. Acest efect este, de asemenea, posibil la cristalele piezoelectrice.

c) PIEZOMAGNETISMUL ŞI ALTE FENOMENE DESCRISE DE TENSORI AXIALI DE ORDINUL TREI

Piezomagnetismul este un fenomen legat de magnetizarea cristalelor sub influenţa acţiunilor mecanice. Acest fenomen a fost descoperit relativ nu demult, de către A.S. Borovik-Romanov*. Dacă se consideră legătura dintre deformaţii (tensor simetric de ordinul doi) şi intensitatea cîmpului magnetic **H**, ecuaţiile magntizării vor avea forma

$$r_{ij} = K_{ijk} H_k \tag{3.54}$$

unde K_{ijk} este un tensor axial de ordinul trei (tensorul coeficienţilor piezomagnetici).

Influenţa simetriei asupra formei matricei coeficienţilor piezomagnetici se determină din relaţiile (3.37). Respectivele forme ce rezultă sînt date în tabelul 22. De aici se vede că pot avea proprietăţi piezomagnetice toate clasele de cristale, cu excepţia claselor $m3m$, $\bar{4}3m$ şi 432. În particular, acest efect este posibil la cele zece clase de cristale centrosimetrice. Şi texturile cu simetria ∞/mmm, ∞mm, ∞/m, $\infty 2$, ∞ trebuie să aibă proprietăţi piezomagnetice**.

---

* Borovik-Romanov, A.S., *Piezomagnetismul la fluorurile de cobalt şi mangan, antiferomagnetice*, Jur. exp. i teor. fiz., 36, 1954, 1959.

** De pe poziţiile sim triei complete, piezomagnetismul este posibil la 66 clase de cristale. În completare la tabelul 22 trebuie adăugate 29 clase: $\underline{m}$, $\underline{2}$, $\underline{2}/\underline{m}$, $\underline{2}m\underline{m}$, $2\underline{m}\underline{m}$, $\underline{2}\underline{2}\underline{2}$, $m\underline{m}\underline{m}$, $\underline{4}$, $\underline{\bar{4}}$, $\underline{4}/\underline{m}$, $\underline{\bar{4}}2\underline{m}$, $\underline{4}\underline{2}\underline{2}$, $\underline{4}m\underline{m}$, $\underline{\bar{4}}2\underline{m}$, $\underline{4}/m\underline{m}\underline{m}$, $6\underline{2}\underline{2}$, $6\underline{m}\underline{m}$, $\underline{\bar{6}}\underline{m}2$, $6/m\underline{m}\underline{m}$, $3\underline{2}$, $3\underline{m}$, $\underline{\bar{3}}\underline{m}$, $\underline{6}$, $\underline{\bar{6}}$, $\underline{6}/\underline{m}$, $\underline{6}\underline{2}\underline{2}$, $\underline{6}m\underline{m}$, $\underline{\bar{6}}\underline{m}2$, $\underline{6}/m\underline{m}\underline{m}$, $\underline{4}\underline{3}\underline{2}$, $\underline{\bar{4}}3\underline{m}$, $m3\underline{m}$, $\underline{\bar{6}}\underline{m}2$, $4\underline{2}\underline{2}$, $4\underline{m}\underline{m}$, $4\underline{2}\underline{m}$, $\underline{4}/m\underline{m}\underline{m}$.

Scanned with OKEN Scanner

Tabelul 22

Matricele coeficienților tensorilor axiali de ordinul trei care descriu piezomagnetismul

Clasele de simetrie ale cristalelor și texturilor	Tensorul axial de ordinul trei	Nr. coeficienților independenți	Simetria tensorului	Clasele de simetrie ale cristalelor și texturilor	Tensorul axial de ordinul trei	Nr. coeficienților independenți	Simetria tensorului
1, $\bar{1}$	$\begin{matrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} & K_{14} & K_{15} & K_{16} \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} & K_{24} & K_{25} & K_{26} \\ K_{31} & K_{32} & K_{33} & K_{34} & K_{35} & K_{36} \end{matrix}$	18	$\bar{1}$	$\bar{4}$, 4, 4/*m*, $\bar{6}$, 6, 6/*m*, ∞	$\begin{matrix} 0 & 0 & 0 & K_{14} & K_{15} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & K_{15} & -K_{14} & 0 \\ K_{31} & K_{31} & K_{33} & 0 & 0 & 0 \end{matrix}$	4	∞
2, *m*, 2/*m*	$\begin{matrix} 0 & 0 & 0 & K_{14} & K_{15} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & K_{24} & K_{25} & 0 \\ K_{31} & K_{32} & K_{33} & 0 & 0 & K_{36} \end{matrix}$	8	2/*m*	$\bar{3}$, 3	$\begin{matrix} K_{11} & -K_{11} & 0 & K_{14} & K_{15} & -2K_{22} \\ -K_{22} & K_{22} & 0 & K_{15} & -K_{14} & -2K_{11} \\ K_{31} & K_{31} & K_{33} & 0 & 0 & 0 \end{matrix}$	6	$\bar{3}$
222, *mm*2, *mmm*	$\begin{matrix} 0 & 0 & 0 & K_{14} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & K_{25} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & K_{36} \end{matrix}$	3	*mmm*	3*m*, 32, $\bar{3}m$	$\begin{matrix} K_{11} & -K_{11} & 0 & K_{14} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & K_{14} & -2K_{11} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix}$	2	$\bar{3}m$
$\bar{4}$2*m*, 4*mm*. 422, 4/*mmm* $\bar{6}$*m*2, 6*mm*, 622, 6/*mmm*, ∞*m*, ∞/*m*, ∞2, ∞/*mmm*	$\begin{matrix} 0 & 0 & 0 & K_{14} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -K_{14} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix}$	1	∞/*mmm*	23, *m*3	$\begin{matrix} 0 & 0 & 0 & K_{14} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & K_{14} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & K_{14} \end{matrix}$	1	*m*3

Scanned with OKEN Scanner

Dăm în continuare, ca exemplu, matricea coeficienților piezomagnetici pentru clasele 2, m, $2/m$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & K_{14} & K_{15} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & K_{24} & K_{25} & 0 \\ K_{31} & K_{32} & K_{33} & 0 & 0 & K_{36} \end{pmatrix}. \qquad (3.55)$$

Din această matrice se vede, în particular, că deformațiile de deplasare induc magnetizarea cristalului după axele X și Y (coeficienții K_{14} și K_{24}). Se poate arăta că și la piezomagnetism (ca și la piezoelectricitate) apariția magnetizării datorită unor acțiuni mecanice este însoțită totdeauna de apariția unei direcții axiale privilegiate în cristal (dacă nu există deja o asemenea direcție).

Relativ recent s-a arătat că este posibilă polarizarea electrică a cristalelor sub influența unei torsionări uniforme*. Ulterior, acest fenomen a fost descoperit și studiat**. Analitic este descris de relația

$$P_i = B_{ijk} M_{jk} \qquad (3.56)$$

în care P_i reprezintă componentele vectorului polarizare electrică, B_{ijk} — componentele tensorului polarizării datorite torsionării (tensor axial de ordinul trei), iar M_{jk} — componentele momentului de torsionare specific (tensor axial de doi). Tensorul M_{jk} determină momentul de torsionare raportat la unitatea de suprafață și este o mărime de cîmp. Forma matricei coeficienților tensorului $[B_{ijk}]$ coincide cu forma matricei coeficienților efectului piezomagnetic $[K_{ijk}]$ (vezi tabelul 22).

Polarizarea prin torsionare este studiată experimental; ea a fost descoperită la cristalele de acetat de potasiu (AK) ale sulfatului de litiu (SL), ale triglicinsulfatului (TGS). După cum au arătat cercetările, coeficienții B_{22} pentru aceste cristale, în sistemul CGSε_0 au valorile $2{,}0 \cdot 10^{-8}$ (AK), $4{,}8 \cdot 10^{-8}$ (SL) și $2{,}7 \cdot 10^{-8}$ (TGS). Măsurarea coeficienților B_{22} este cea mai

---

* Torsiunea obișnuită nu este o deformație uniformă. Numai în prima aproximație, pentru suprafețe mici ale probelor, se poate folosi deformația de torsiune obișnuită în calculele fenomenelor considerate.

** Jeludev, I. S., *Tensorii axiali de ordinul trei și fenomene fizice descrise de ei*, Kristalografia, **9**, 501, 1964.

Jeludev, I. S., *Simetria și proprietățile piezoelectrice ale cristalelor*, Czeh. J. Phys. B, **16**, 368, 1966.

Jeludev, I. S., Lihaceva, Iu. S., Lileeva, N.A., *Din nou despre problema polarizării electrice a cristalelor sub influența deformației de torsiune*, Kristalografia, **14**, 514, 1969.

Scanned with OKEN Scanner

intuitivă (fig. 71). Valorile coeficienților B_{22} se calculează cu ajutorul expresiei

$$B_{22} = \frac{P_2}{M_{22}} = \frac{Q/S}{Pr/S} = \frac{CV}{Pr} \qquad (3.57)$$

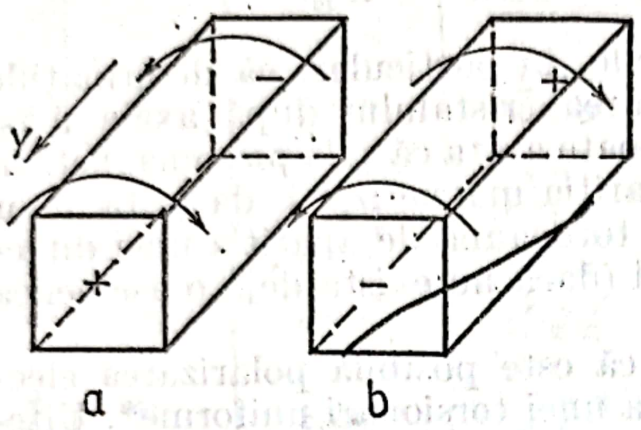


Fig. 71. Polarizarea electrică a cristalelor datorită deformației de răsucire:
a — răsucire dreaptă; b — răsucire stîngă.

unde Q este sarcina electrică S — suprafața probei, P — forța de torsiune, r — brațul forței, C — capacitatea probei (și a montajului), iar V — diferența de potențial ce apare. Coeficientul B are, în sistemul CGS ε_0 dimensiunile $[cm^{-1/2} \cdot g^{1/2} \cdot s]$. Proporționalitatea dintre momentul de răsucire și diferența de potențial apărută, ce rezultă din relația (3.57) (la o lungime a probei de 1 cm), este bine ilustrată grafic în fig. 72, a pe exemplul acetatului de potasiu.

Toate cristalele menționate au proprietăți piezoelectrice (TGS — sub punctul Curie : + 49°C), adică pot să se polarizeze sub influența unei deformații uniforme (comprimare-întindere și deplasare). S-a arătat, totuși, că efectele de piezopolarizare și de polarizare sub influența deformației de răsucire pot fi separate și că ultimul dintre ele este de sine stătător. În acest

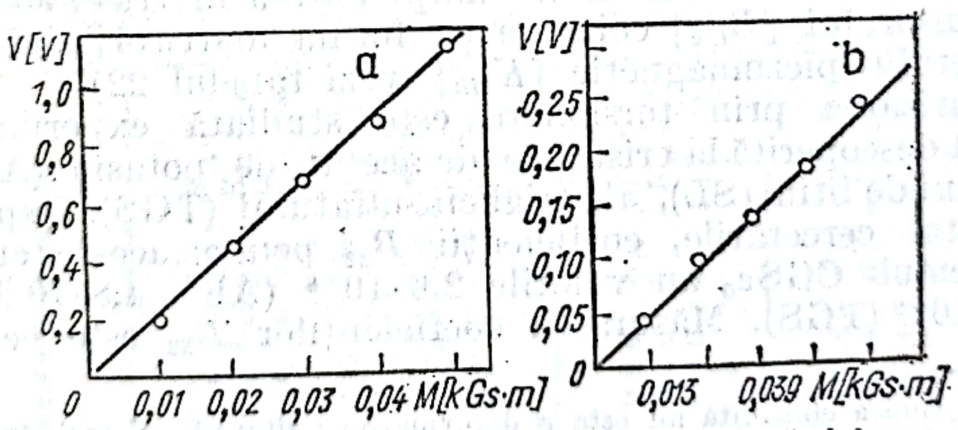


Fig. 72. Polarizarea electrică a cristalelor datorită deformației de răsucire:
a — cristal de acetat de potasiu (polarizare după axa 2); b — cristal de scheelită (polarizare după axa 4). (În ambele cazuri polarizarea este măsurată în direcția axei de răsucire).

scop s-au făcut cercetări speciale asupra polarizării la torsionare, pe cristalele de scheelită, $CaWO_4$. Cristalul studiat avea grupul de simetrie $4/m$, poseda centru de simetrie şi, deci, nu prezenta efect piezoelectric. Rezultatele polarizării prin torsionarea cristalului sînt date în fig. 72, b. Din grafic se vede proporţionalitatea dintre diferenţa de potenţial apărută după axa 4 a cristalului şi momentul specific M_{33}. S-a stabilit, de asemenea, că orientarea polarizării (cum şi trebuia să se întîmple) se inversează la schimbarea „semnului" torsionării (de la dreapta la stînga). Valoarea medie a coeficientului B_{33}, calculată cu relaţia (3.57), s-a dovedit egală cu $0{,}45 \cdot 10^{-8}$ unităţi electrostatice.

Procesul de polarizare a scheelitei (ca şi a altor cristale) sub influenţa deformaţiei de torsiune poate fi tratat, din punct de vedere al simetriei (analog modului în care am procedat mai înainte în cazul efectului piezoelectric direct), ca transformarea direcţiei axiale (axa 4) în polară privilegiată. Tocmai apariţia unei direcţii polare privilegiate prin torsionarea cristalului determină posibilitatea apariţiei polarizării electrice după axa 4.

Se poate prevedea existenţa încă a unui fenomen, care este, de asemenea, descris de un tensor axial de ordinul trei. Acesta trebuie să conste în modificarea (sau apariţia) activităţii optice a cristalelor sub influenţa cîmpului electric. Vom numi efectul despre care este vorba efect de *activitate electrooptică* sau de *electrogiraţie**. Notînd cu ρ rotaţia specifică a planului de polarizare al luminii, sub influenţa cîmpului electric **E**, obţinem legătura dintre tensorul axial de ordinul doi $[\rho_{ij}]$ şi componentele E_k ale vectorului **E** sub forma

$$\rho_{ij} = l_{ijk} E_k \qquad (3.58)$$

unde l_{ijk} (*coeficienţii activităţii electrooptice*) sînt componentele unui tensor axial ordinul trei.

Matricele coeficienţilor l_{ij} (cînd se trece la notarea cu doi indici) coincid complet cu matricele coeficienţilor K_{ij} daţi în tabelul 22. Totuşi, pentru descrierea efectului de activitate

---

* Acest fenomen a fost descoperit experimental de către Bloh, O. G., Lazko, A. A., Jeludev, I. S.; vezi lucrarea acestora: *Influenţa acţiunii exterioare asupra proprietăţilor girotrope ale cristalelor de* $LiIO_3$, Kristalografia, 20, 654, 1975.

electrooptică tabloul coeficienţilor din matrice trebuie scris sub forma

$$\begin{array}{cccc} & E_1 & E_2 & E_3 \\ \rho_1 & l_{11} & l_{21} & l_{31} \\ \rho_2 & l_{12} & l_{22} & l_{32} \\ \rho_3 & l_{13} & l_{23} & l_{33} \\ \rho_4 & l_{14} & l_{24} & l_{34} \\ \rho_5 & l_{15} & l_{25} & l_{35} \\ \rho_6 & l_{16} & i_{26} & l_{36} \end{array} \qquad (3.59)$$

Din acest tablou se vede că activitatea electrooptică poate apărea la cristalele tuturor claselor, cu excepţia celor trei cubice $m3m$, $\bar{4}3m$ şi 432.

Din punct de vedere experimental cel mai mare interes îl prezintă cristalele în care activitatea electrooptică nu va masca efectul electrooptic liniar obişnuit. După cum s-a arătat mai înainte, ultimul fenomen nu există în cristalele centrosimetrice. Aceasta înseamnă că la clase de cristale ca mmm, $\bar{3}m$, $4/m$, $6m$ şi altele, aplicarea cîmpului electric va fi însoţită numai de efectul de activitate electrooptică. Cel mai simplu de măsurat trebuie să fie efectul de activitate electrooptică în cazurile în care această activitate va apare în direcţia axei optice a cristalelor uniaxe. Din acest punct de vedere cel mai simplu de detectat este activitatea electrooptică la cristalele claselor $4/m$, $6/m$, $\bar{6}$ şi $\bar{4}$. Este interesant că la ultimele două clase efectul de activitate electrooptică liniar nu va împiedica apariţia efectului de activitate electrooptică, întrucît aplicarea cîmpului electric în direcţia axei principale nu conduce la efect liniar pe această direcţie ($r_{33} = 0$; vezi tabelul 21)*.

d) POLARIZAREA CRISTALELOR DE CUART DUPĂ AXA Z ÎN CAZUL DEFORMAŢIEI DE ÎNCOVOIERE COMPUSĂ

Acest fenomen este apropiat de fenomenele descrise de tensori axiali de ordinul trei.

În concordanţă cu interpretarea geometrică a grupurilor de simetrie ale cristalelor (vezi cap. 1 şi 2), grupul de simetrie al cuarţului (32) nu contrazice reprezentarea potrivit căreia în

* Nu demult, electrogiraţia a fost descoperită şi la cristalele de $PbMoO_4$, care aparţin clasei $4/m$; vezi: Bloh, O. G., Jeludev, I.S., Klimov, I. M., *Activitatea optică sub acţiunea cîmpului electric în cristalele de* $PbMoO_4$ (electrogiraţia), DAN CCCP, 223, 6, 1391, 1975.

Scanned with OKEN Scanner

baza cristalelor de cuarţ se află un sistem de trei dipoli, orientaţi sub unghiul de 120° unul faţă de celălalt şi care, deci, se compensează reciproc (fig. 73, a). O asemenea imagine concordă cu faptul că axele electrice ale cuarţului (de exemplu, axa X), adică axele de simetrie de ordinul doi, sînt polare. Reprezentarea efectului piezoelectric în acest cristal poate fi realizată cu ajutorul acestui model, din care se vede, în particular, că deoarece

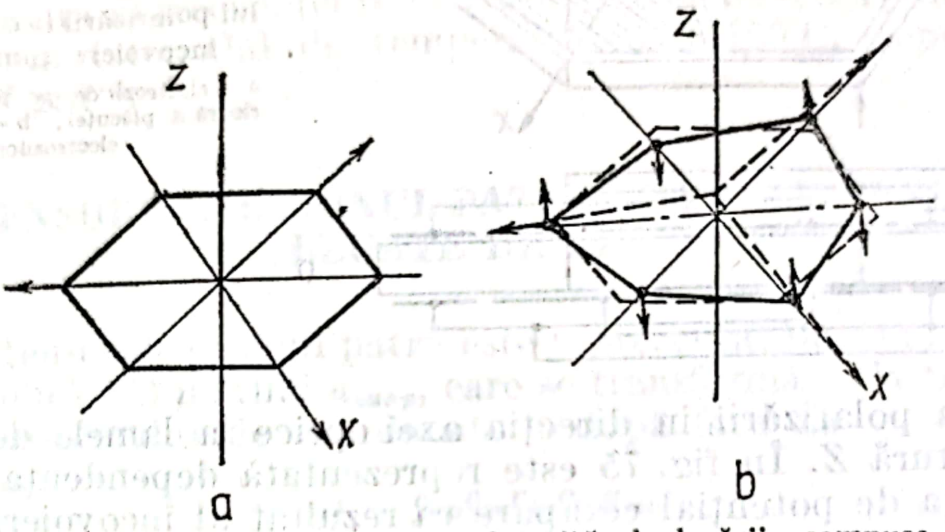


Fig. 73. Orientarea dipolilor datorită deplasării compuse nedeformate (a) şi deformate (b) a unei plăcuţe de cuarţ cu tăietură Z.

ansamblul de dipoli menţionat rămîne în acelaşi plan pentru orice deformaţie, apariţia polarizării după axa Z a cuarţului este imposibilă.

Din fig. 73, b se constată cu uşurinţă că o polarizare după axa Z poate fi indusă în cuarţ cu ajutorul deformaţiei de deplasare compusă, ce are drept rezultat faptul că toate „capetele pozitive" ale dipolilor parcă s-ar ridica, iar cele „negative" s-ar lăsa în jos. O asemenea deformaţie se realizează uşor la o lamelă tăiată după axa Z, încastrată între două pansoane, fiecare dintre acestea avînd cîte trei proeminenţe orientate după unghiurile unui triunghi dreptunghic. Proeminenţele poansoanelor superior şi inferior sînt rotite una faţă de cealaltă cu 60°. Pentru înregistrarea efectului piezoelectric apărut în suprafaţa bazei lamelei se utilizează un sistem de electrozi, al căror montaj este schematizat în fig. 74.

Cercetările efectuate * au confirmat cele afirmate mai înainte : s-a stabilit cu certitudine şi măsurat pe o serie de probe

---

* Jeludev, I. S., *Simetria şi proprietăţile piezoelectrice ale cristalelor*, Czeh. J. Phys B, 16, 368, 1966.

Scanned with OKEN Scanner

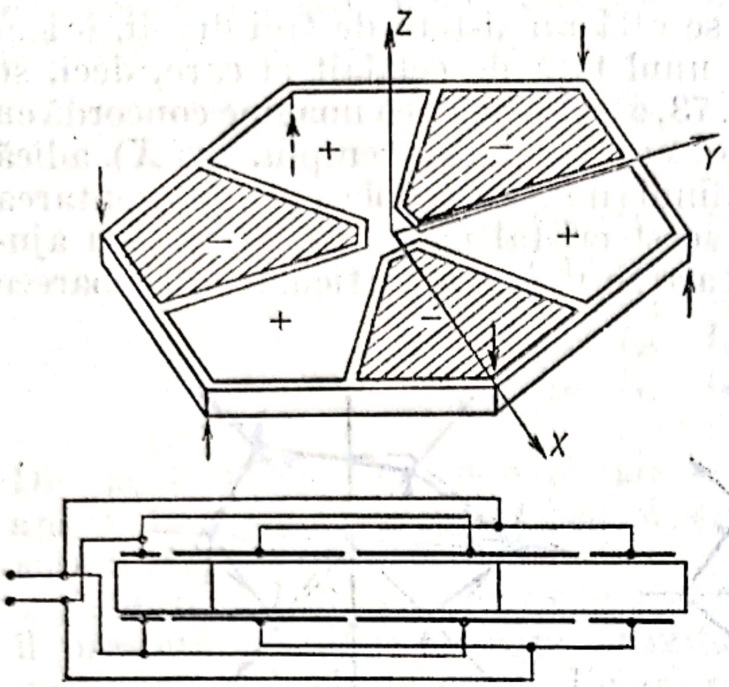


Fig. 74. Sistem de electrozi pe o plăcuță de cuarț cu tăietură Z destinat studiului polarizării la o deplasare încovoiere compusă:

a — electrozii de pe partea superioară a plăcuței; b — comutația electrozilor.

apariția polarizării în direcția axei optice la lamele de cuarț de tăietură *Z*. În fig. 75 este reprezentată dependența dintre diferența de potențial ce apare ca rezultat al încovoierii compuse și sarcina pe poanson, obținută pentru o lamelă sub formă de prismă hexagonală, cu latura de ~1 cm și grosimea (înălțimea prismei) de ~1 mm.

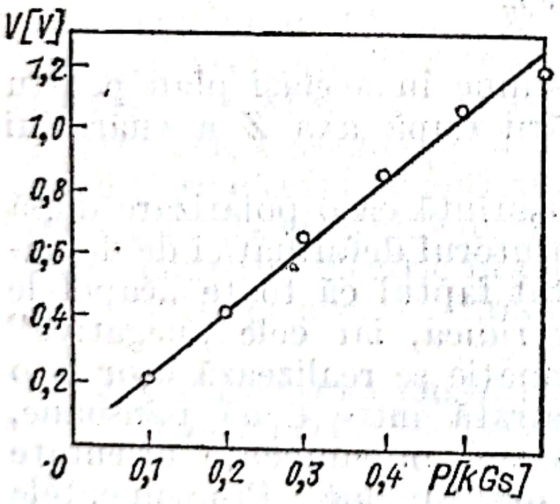


Fig. 75. Tensiunea pe o plăcuță de cuarț *Z* apărută ca urmare a deformație datorite unei deplasări compuse.

Caracteristica polarizării în cazul încovoierii compuse D se determină din raportul dintre densitatea de sarcină σ și momentul de încovoiere specific M_1

$$D = \frac{\sigma}{M_1} = \frac{CV/S}{Pr/S_1} = \frac{CVS_1}{PrS} \qquad (3.60)$$

unde C reprezintă capacitatea probei (și montajului), V — diferența de potențial ce apare, S — suprafața tăieturii Z a lamelei, S_1 — suprafața secțiunii lamelei, P — forța de încovoiere, iar r — distanța dintre punctul de apăsare „în jos" și punctul de apăsare „în sus" după diagonala lamelei ($S_1 = rh$, unde h este grosimea lamelei). Dimensiunile lui D coincid cu dimensiunile coeficienților K (și B).

Scanned with OKEN Scanner

Măsurători corecte, ale polarizării D pentru cuarţ au permis să se calculeze acest coeficient (cu o eroare de ~10%): $(0{,}6-0{,}7)\cdot 10^{-8}$ unităţi electrostatice.

În cazul lamelelor de cuarţ de tăietură Z a fost descoperit şi efectul piezoelectric invers. O lamelă de dimensiunile date mai sus se excită bine la frecvenţa de bază, de aproximativ 400 kHz, şi are o serie de rezonanţe satelite. Coeficientul de temperatură al frecvenţei (CTF) al lamelei de cuarţ de tăietură Z, în intervalul de temperaturi 25—100°C, reprezintă $23\cdot 10^{-6}$ grd^{-1}.

3.5. TENSORI DE ORDINUL PATRU ŞI UNELE FENOMENE LEGATE DE EI

Un tensor de ordinul patru este reprezentat de un ansamblu de 3^4 (adică 81) mărimi a_{nnop}, care se transformă — la transformările sistèmului de coordonate — după formula

$$a'_{ijkl} = c_{im}c_{jn}c_{ko}c_{lp}a_{mnop} \tag{3.61}$$

unde c_{im}, c_{jn} etc. sînt cosinuşii matricei de transformare a sistemului de coordonate, a_{mnop} — vechile componente ale tensorului, iar a'_{ijkl} — noile componente ale tensorului.

În general, se pot considera atît tensori polari, cît şi axiali de ordinul patru. În cel mai simplu caz, un tensor polar de ordinul patru a_{mnop} leagă doi tensori polari de ordinul doi b_{mn} şi e_{op}

$$b_{mn} = a_{mnop}e_{op}. \tag{3.62}$$

Prin tensori polari de ordinul patru sînt descrise proprietăţile elastice ale cristalelor (legătura din tensorii tensiunilor şi deformaţiilor), fotoelasticitatea [legătura dintre tensorul constantelor de polarizare şi tensorul deformaţiilor (tensiunilor)], electrostricţiunea (legătura dintre tensorul deformaţiilor şi pătratul vectorul polar al cîmpului electric), magnetostricţiunea (legătura dintre tensorul deformaţiilor şi pătratul vectorului axial al cîmpului magnetic) ş.a.m.d.

Ca exemplu de tensor axial de ordinul patru putem da tensorul care descrie variaţia activităţii optice a cristalelor sub influenţa unei deformaţii (legătura dintre un tensor axial de ordinul doi şi un tensor polar de ordinul doi). Evident, în formulele de transformare ale componentelor (3.61), în cazul unui

Scanned with OKEN Scanner

tensor axial de ordinul patru înaintea combinației cosinușilor directori se va lua semnul minus dacă transformarea sistemului de coordonate se petrece cu schimbarea semnului de enantiomorfism al acestuia.

În continuare vom analiza caracteristicile principale de simetrie ale fenomenelor elastice, de electrostricțiune, fotoelastice și electrooptice descrise de tensori de ordinul patru.

d) PROPRIETĂȚILE ELASTICE ALE CRISTALELOR. LEGEA GENERALIZATĂ A LUI HOOKE

Dacă se aplică asupra unui cristal o tensiune uniformă oarecare $[t_{ij}]$, atunci — în limitele de elasticitate — deformația uniformă apărută are fiecare dintre componente r_{ij} corelată liniar cu toate componentele tensiunii. De exemplu,

$$r_{11} = S_{1111}t_{11} + S_{1112}t_{12} + S_{1113}t_{13} + S_{1121}t_{21} + \\ + S_{1122}t_{22} + S_{1123}t_{23} + S_{1131}t_{31} + S_{1132}t_{32} + S_{1133}t_{33} \quad (3.63)$$

sau sub formă generalizată

$$r_{ij} = S_{ijkl}t_{kl} \quad (3.64)$$

unde S_{ijkl} sînt *maleabilitățile* cristalului. Ecuația (3.64) înlocuiește nouă ecuații, fiecare dintre ele avînd în partea dreaptă cîte nouă termeni. În total sînt 81 coeficienți S_{ijkl}.

Din ecuația (3.64) se vede că dacă și numai o singură componentă a tensiunii este diferită de zero, deformația poate să aibă loc după direcții diferite. De exemplu, în cazul întinderii uniaxiale a unei bare cristaline dreptunghiulare, aceasta nu numai că se lungește în direcția întinderii, dar va suferi și o deformare în urma căreia, în cazul general, unghiurile dintre muchiile ei — drepte inițial — nu vor mai fi drepte.

Tensiunea, la rîndul ei, se poate exprima în funcție de deformație

$$t_{ij} = C_{ijkl}r_{kl} \quad (3.65)$$

unde C_{ijkl} sînt constantele de *rigiditate* ale cristalului. Numărul acestor constante este 81. Constantele C_{ijkl} și S_{ijkl} sînt în raport invers (în sensul tensorial al cuvîntului). Ecuațiile (3.64) și (3.65) reprezintă *legea generalizată a lui Hooke*.

Scanned with OKEN Scanner

Pentru cazul cînd $r_{ij} = r_{ji}$ și $t_{ij} = t_{ji}$, adică în cazul tensorilor deformațiilor și tensiunilor simetrici, au loc egalitățile

$$S_{ijkl} = S_{ijlk}\,;\quad S_{ijkl} = S_{jikl}$$

$$C_{ijkl} = C_{ijlk}\,;\quad C_{ijkl} = C_{jikl} \tag{3.66}$$

și numărul coeficienților S_{ijkl} și C_{ijkl} scade de la 81 la 36. Cei 81 de coeficienți din ecuațiile (3.64) și (3.65), care leagă cîte doi tensori polari de ordinul doi, formează tensorii polari de ordinul patru $[S_{ijkl}]$ și $[C_{ijkl}]$ respectiv cu regulile de transformare ale componentelor după formula (3.61).

Pentru scrierea simplificată a coeficieneților S_{ijkl} și C_{ijkl}, ținînd cont de relațiile (3.66), se folosește adeseori o formă de scriere mai simplă a legii generalizate a lui Hooke. Astfel, pentru tensorii simetrici $[t_{ij}]$ și $[r_{ij}]$ se pot introduce notațiile

$$\begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} & t_{13} \\ t_{12} & t_{22} & t_{23} \\ t_{13} & t_{23} & t_{33} \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} t_1 & t_6 & t_5 \\ t_6 & t_2 & t_4 \\ t_5 & t_4 & t_3 \end{bmatrix}; \tag{3.67}$$

$$\begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{12} & r_{22} & r_{23} \\ r_{13} & r_{23} & r_{33} \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} r_1 & \frac{1}{2} r_6 & \frac{1}{2} r_5 \\ \frac{1}{2} r_6 & r_2 & \frac{1}{2} r_4 \\ \frac{1}{2} r_5 & \frac{1}{2} r_4 & r_3 \end{bmatrix} \tag{3.68}$$

Aceasta permite să se restrîngă perechile de indici ai lui S_{ijkl} și C_{ijkl} după una din schemele următoare: $11 \to 1$; $22 \to 2$; $33 \to 3$; $23 = 32 \to 4$; $31 = 13 \to 5$; $12 = 21 \to 6$. În acest caz este necesar să introducă factorii 2 și 4 pentru S_{ij} conform regulii următoare

$S_{ijkl} = S_{mn}$ dacă atît m, cît și n sînt egali cu 1, 2, 3;

$2S_{ijkl} = S_{mn}$ dacă m sau n este egal cu 1, 2, 3;

$4S_{ijkl} = S_{mn}$ dacă atît m cît și n sînt egali cu 4, 5, 6.

Ca exemplu, ecuația (3.63) are următoarea formă în noua scriere

$$r_1 = S_{11}t_1 + \frac{1}{2} S_{16}t_6 + \frac{1}{2} S_{15}t_5 + \frac{1}{2} S_{16}t_6 + \frac{1}{2} S_{12}t_2 +$$

$$+ \frac{1}{2} S_{14}t_4 + \frac{1}{2} S_{15}t_5 + \frac{1}{2} S_{14}t_4 + S_{13}t_3,$$

Scanned with OKEN Scanner

iar mărimea r_{23} se transformă astfel

$$\frac{1}{2}r_4 = \frac{1}{2}S_{41}t_1 + \frac{1}{2}S_{46}t_6 + \frac{1}{4}S_{46}t_5 + \frac{1}{4}S_{46}t_6 + \frac{1}{2}S_{42}t_2 +$$

$$+\frac{1}{2}S_{44}t_4 + \frac{1}{4}S_{45}t_5 + \frac{1}{4}S_{44}t_4 + \frac{1}{2}S_{43}t_3.$$

În scrierea generalizată utltimele două expresii sînt

$$r_1 = S_{1j}t_j\ ;\ r_4 = S_{4j}t_j.$$

În cazul general

$$r_i = S_{ij}t_j\ (i,\ j = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ 6). \tag{3.69}$$

Factorii 2 și 4 la S_{ij} au fost introduși pentru a elimina apariția lor în ecuațiile de tipul (3.69). Pentru C_{ijkl} factorii 2 și 4 nu sînt necesari și ecuația (3.65) are în acest caz forma

$$t_i = C_{ij}r_j \quad (i,\ j,= 2,\ 3,\ \ldots 6). \tag{3.70}$$

Ecuațiile (3.69) și (3.70) pot fi scrise și sub formă matriceală

$$\begin{array}{c|cccccc} & t_1 & t_2 & t_3 & t_4 & t_5 & t_6 \\ r_1 & S_{11} & S_{12} & S_{13} & S_{14} & S_{15} & S_{16} \\ r_2 & S_{21} & S_{22} & S_{23} & S_{24} & S_{25} & S_{26} \\ r_3 & S_{31} & S_{32} & S_{33} & S_{34} & S_{35} & S_{36} \\ r_4 & S_{41} & S_{42} & S_{43} & S_{44} & S_{45} & S_{46} \\ r_5 & S_{51} & S_{52} & S_{53} & S_{54} & S_{55} & S_{56} \\ r_6 & S_{61} & S_{62} & S_{63} & S_{64} & S_{65} & S_{66} \end{array} \tag{3.71}$$

$$\begin{array}{c|cccccc} & r_1 & r_2 & r_3 & r_4 & r_5 & r_6 \\ t_1 & C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} \\ t_2 & C_{21} & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} & C_{26} \\ t_3 & C_{31} & C_{32} & C_{33} & C_{34} & C_{35} & C_{36} \\ t_4 & C_{41} & C_{42} & C_{43} & C_{44} & C_{45} & C_{46} \\ t_5 & C_{51} & C_{52} & C_{53} & C_{54} & C_{55} & C_{56} \\ t_6 & C_{61} & C_{62} & C_{63} & C_{64} & C_{65} & C_{66} \end{array} \tag{3.72}$$

Observăm că coeficienții matricelor (S_{ij}) și (C_{ij}) se transformă ca componentèle tensorilor de ordinul patru și, de aceea, în transformări trebuie să apelăm la notații cu patru indici.

Forma tensorilor $[S_{ijkl}]$ și $[C_{ijkl}]$, precum și a matricelor (S_{ij}) și (C_{ij}) pentru diversele clase de cristale poate fi stabilită prin

Scanned with OKEN Scanner

metode diferite : folosind principiul de simetrie Curie, metodele teoriei grupurilor etc. Cel mai larg se utilizează metoda directă, care se reduce la transformarea sistemului de coordonate al tensorului, corespunzător unui element de simetrie sau altuia și găsirii limitărilor impuse asupra componentelor tensorului și care rezultă din compararea matricei inițiale cu cea nouă obținută. Această metodă a fost analizată amănunțit în capitolele 1 și 2, precum și în § 3.4, cînd s-au studiat tensorii de ordinul trei.

După găsirea matricelor coeficienților independenți S_{ij} și C_{ij} se mai poate face o simplificare. Ea este legată de faptul că energia deformării elastice este determinată univoc de deformațiile ($1/2\ C_{ij}r_ir_j$). Drept consecință avem simetria matricei (C_{ij}): $C_{ij} = C_{ji}$; analog $S_{ij} = S_{ji}$. În ultimă instanță, aceasta conduce la micșorarea numărului maxim de coeficienți independenți ai matricelor (S) și (C) de la 36 la 21, ceea ce înseamnă că, în tensori, coeficienții S și C — situați simetric față de diagonala principală — sînt egali

$$S_{ijkl} = S_{klij}\ ;\quad C_{ijkl} = C_{klij} \tag{3.73}$$

sau că tensorii $[S]$ și $[C]$ sînt tensori simetrici și după perechile de indici. Simetria tensorilor $[S_{ijkl}]$ și $[C_{ijkl}]$ după indicii i și j, k și l este în cazul dat o consecință a faptului că s-au considerat numai tensorii simetrici $[r_{ij}]$ și $[t_{ij}]$.

Formele matricelor C_{ij} pentru toate clasele de cristale sînt date în tabelul 23. În total există nouă matrice ale coeficienților C_{ij} diferite ca formă, cu numărul mărimilor independente de la la trei (pentru sistemul cubic) pînă la 21 (pentru sistemul triclinic). În cazul mediilor izotrope (cu simetria $\infty/\infty/mmm$ și $\infty/\infty 2$) matricea C_{ij} are doi coeficienți independenți (modul lui Young și coeficientul lui Poisson corespunzători din teoria elasticității).

Valorile absolute ale coeficienților C_{mn} pentru cristale sînt $10^{11} - 10^{12}$ dyn/cm^2 (în sistemul CGS ε_0). Interpretarea geometrică a tensorilor de ordinul patru nu este atît de intuitivă ca a celor de ordinul doi și trei și nu o vom discuta aici.

b) FOTOELASTICITATEA, EFECTUL ELECTROOPTIC PĂTRATIC (EFECTUL KERR) ȘI ELECTROSTRICȚIUNEA

Fotoelasticitatea este un fenomen legat de modificarea proprietăților optice ale cristalelor ca rezultat al unei acțiuni mecanice. Variația („creșterea") constantelor de polarizare [tensor polar de ordinul doi ; vezi formula (3.53)] este legată,

Scanned with OKEN Scanner

Forma matricelor constantelor de rigiditate ($C_{ij}=C_{ji}$)

Sistemul sau clasa de cristale	Forma matricei	Numărul coeficienților independenți
$\infty/\infty/mmm$ $\infty/\infty 2$ (medii izotrope)	$\begin{matrix} C_{11} & C_{12} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{11} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{12} & C_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}(C_{11}-C_{12}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}(C_{11}-C_{12}) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}(C_{11}-C_{12}) \end{matrix}$	2
Cubic	$\begin{matrix} C_{11} & C_{12} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{11} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{12} & C_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{44} \end{matrix}$	3
Hexagonal	$\begin{matrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{11} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{13} & C_{13} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}(C_{11}-C_{12}) \end{matrix}$	5
$3m$, 32, $\bar{3}m$	$\begin{matrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{11} & C_{13} & -C_{14} & 0 & 0 \\ C_{13} & C_{13} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ C_{14} & -C_{14} & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{44} & C_{14} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{14} & \frac{1}{2}(C_{11}-C_{12}) \end{matrix}$	6
3, $\bar{3}$	$\begin{matrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & 0 \\ C_{12} & C_{11} & C_{13} & -C_{14} & -C_{15} & 0 \\ C_{13} & C_{13} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ C_{14} & -C_{14} & 0 & C_{44} & 0 & -C_{15} \\ C_{15} & -C_{15} & 0 & 0 & C_{44} & C_{14} \\ 0 & 0 & 0 & -C_{15} & C_{14} & \frac{1}{2}(C_{11}-C_{12}) \end{matrix}$	7
$4mm$, $\bar{4}2m$ 422, $4/mmm$	$\begin{matrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{11} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{13} & C_{13} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{matrix}$	6
4, $\bar{4}$, $4/m$	$\begin{matrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & C_{16} \\ C_{12} & C_{11} & C_{13} & 0 & 0 & -C_{16} \\ C_{13} & C_{13} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 \\ C_{16} & -C_{16} & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{matrix}$	7
Rombic	$\begin{matrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{matrix}$	9
Monclinic	$\begin{matrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & C_{16} \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & C_{26} \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & 0 & 0 & C_{36} \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & C_{45} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{45} & C_{55} & 0 \\ C_{16} & C_{26} & C_{36} & 0 & 0 & C_{66} \end{matrix}$	13
Triclinic	$\begin{matrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} & C_{26} \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & C_{34} & C_{35} & C_{36} \\ C_{14} & C_{24} & C_{34} & C_{44} & C_{45} & C_{46} \\ C_{15} & C_{25} & C_{35} & C_{45} & C_{55} & C_{56} \\ C_{16} & C_{26} & C_{36} & C_{46} & C_{56} & C_{66} \end{matrix}$	21

Scanned with OKEN Scanner

în acest caz, de tensorul deformaţiilor sau tensiunilor (ambii tensori polari de ordinul doi)

$$\left.\begin{aligned} \Delta a_{ij} &= \pi_{ijkl} t_{kl}\,; \\ \Delta a_{ij} &= p_{ijrs} r_{rs} \end{aligned}\right\} \qquad (3.74)$$

unde coeficienţii piezoelectrici π_{ijkl} şi coeficienţii elastooptici p_{ijrs} sînt tensori polari de ordinul patru. Între ei, aceşti coeficienţi sînt corelaţi prin formulele

$$\left.\begin{aligned} p_{mn} &= \pi_{mr} C_{rn}\,; \\ \pi_{mn} &= p_{mr} S_{rn} \end{aligned}\right\} \qquad (3.75)$$

(unde C sînt constantele de rigiditate, iar S — constantele de maleabilitate), astfel că pentru coeficienţii π trecerea la doi indici (în forma matriceală) se realizează după regula (pentru orice $m = 1,2,\ldots,\ 6$).

$$\pi_{mn} = \pi_{ijkl} \text{ cînd } n = 1,\ 2 \text{ sau } 3\,;$$

$$\pi_{mn} = 2\,\pi_{ijkl} \text{ cînd } n = 4,\ 5 \text{ sau } 6.$$

În cazul coeficienţilor p lipsesc factorii 2 şi 1/2 din expresiile similare.

Coeficienţii π_{ijkl} şi p_{ijkl} sînt simetrici faţă de perechile de indici interni ($\pi_{ijkl} = \pi_{jikl} = \pi_{jikl}$ etc.), dar nu sînt simetrici (în cazul general) faţă de perechile de indici

$$\left.\begin{aligned} p_{mn} &\neq p_{nm}\,; \\ \pi_{mn} &\neq \pi_{nm}. \end{aligned}\right\} \qquad (3.76)$$

Legat de aceasta, numărul maxim de coeficienţi independenţi π şi p este 36 în cazul cel mai general (şi nu 21 ca pentru coeficienţii C şi S). Matricele coeficienţilor π_{mn} pentru toate clasele de cristale sînt date în tabelul 24. Este interesant, de exemplu, că cristalele cubice din clasele 23 şi $m3$ au o matrice a coeficienţilor (patru coeficienţi independenţi), iar ale celor din clasele $\bar{4}3m$, 432 şi $m3$ — altă matrice (trei coeficienţi independenţi). Elasticitatea tuturor cristalelor cubice este, însă, descrisă de una şi aceeaşi matrice (vezi tabelul 23).

Coeficienţii piezooptici π au dimensiunile [cm² · dyn]; coeficienţii elastooptici p sînt adimensionali. Primii au, de exemplu,

Tabelul 24

Forma matricei coeficienților piezooptici

Sistemele sau clasele de cristale	*Forma matricei*	*Numărul coeficienților independenți*	*Sistemele sau clasele de cristale*	*Forma matricei*	*Numărul coeficienților independenți*
$\infty/\infty/\infty mmm$, $\infty/\infty 2$ (изотропные среды)	$\begin{matrix} \pi_{11} & \pi_{12} & \pi_{12} & 0 & 0 & 0 \\ \pi_{12} & \pi_{11} & \pi_{12} & 0 & 0 & 0 \\ \pi_{12} & \pi_{12} & \pi_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (\pi_{11}-\pi_{12}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & (\pi_{11}-\pi_{12}) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & (\pi_{11}-\pi_{12}) \end{matrix}$	2	$3, \bar{3}$	$\begin{matrix} \pi_{11} & \pi_{12} & \pi_{13} & \pi_{14} & \pi_{15} & -2\pi_{61} \\ \pi_{12} & \pi_{11} & \pi_{13} & -\pi_{14} & \pi_{15} & 2\pi_{61} \\ \pi_{31} & \pi_{31} & \pi_{33} & 0 & 0 & 0 \\ \pi_{41} & -\pi_{41} & 0 & \pi_{44} & \pi_{45} & -2\pi_{51} \\ \pi_{51} & -\pi_{51} & 0 & -\pi_{45} & -\pi_{44} & 2\pi_{41} \\ \pi_{61} & -\pi_{61} & 0 & -\pi_{15} & \pi_{14} & (\pi_{11}-\pi_{12}) \end{matrix}$	12
$\bar{4}3m$, 432, $m3m$	$\begin{matrix} \pi_{11} & \pi_{12} & \pi_{12} & 0 & 0 & 0 \\ \pi_{12} & \pi_{11} & \pi_{12} & 0 & 0 & 0 \\ \pi_{12} & \pi_{12} & \pi_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \pi_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \pi_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \pi_{44} \end{matrix}$	3	$4mm$, $\bar{4}2m$ 422, $4/mmm$	$\begin{matrix} \pi_{11} & \pi_{12} & \pi_{13} & 0 & 0 & 0 \\ \pi_{12} & \pi_{11} & \pi_{13} & 0 & 0 & 0 \\ \pi_{31} & \pi_{31} & \pi_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \pi_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \pi_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \pi_{66} \end{matrix}$	7
23, $m3$	$\begin{matrix} \pi_{11} & \pi_{12} & \pi_{13} & 0 & 0 & 0 \\ \pi_{13} & \pi_{11} & \pi_{12} & 0 & 0 & 0 \\ \pi_{12} & \pi_{13} & \pi_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \pi_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \pi_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \pi_{44} \end{matrix}$	4	$4, \bar{4}, 4/m$	$\begin{matrix} \pi_{11} & \pi_{12} & \pi_{13} & 0 & 0 & \pi_{16} \\ \pi_{12} & \pi_{11} & \pi_{13} & 0 & 0 & -\pi_{16} \\ \pi_{31} & \pi_{31} & \pi_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \pi_{44} & \pi_{45} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\pi_{45} & \pi_{44} & 0 \\ \pi_{61} & -\pi_{61} & 0 & 0 & 0 & \pi_{66} \end{matrix}$	10

Scanned with OKEN Scanner

Sistemele sau clasele de cristale	Forma matricei	Numărul coeficienților independenți	Sistemele sau clasele de cristale	Forma matricei	Numărul coeficienților independenți
$\bar{6}m2$, $6mm$, 622; $6/mmm$	$\begin{matrix} \pi_{11} & \pi_{12} & \pi_{13} & 0 & 0 & 0 \\ \pi_{12} & \pi_{11} & \pi_{13} & 0 & 0 & 0 \\ \pi_{31} & \pi_{31} & \pi_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \pi_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \pi_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & (\pi_{11}-\pi_{12}) \end{matrix}$	6	*Rombic*	$\begin{matrix} \pi_{11} & \pi_{12} & \pi_{13} & 0 & 0 & 0 \\ \pi_{21} & \pi_{22} & \pi_{23} & 0 & 0 & 0 \\ \pi_{31} & \pi_{32} & \pi_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \pi_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \pi_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \pi_{66} \end{matrix}$	12
$\bar{6}$, 6, $6/m$	$\begin{matrix} \pi_{11} & \pi_{12} & \pi_{13} & 0 & 0 & -2\pi_{61} \\ \pi_{12} & \pi_{11} & \pi_{13} & 0 & 0 & 2\pi_{61} \\ \pi_{31} & \pi_{31} & \pi_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \pi_{44} & \pi_{45} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\pi_{45} & \pi_{44} & 0 \\ \pi_{61} & -\pi_{61} & 0 & 0 & 0 & (\pi_{11}-\pi_{12}) \end{matrix}$	8	*Monoclinic*	$\begin{matrix} \pi_{11} & \pi_{12} & \pi_{13} & 0 & 0 & \pi_{16} \\ \pi_{21} & \pi_{22} & \pi_{23} & 0 & 0 & \pi_{26} \\ \pi_{31} & \pi_{32} & \pi_{33} & 0 & 0 & \pi_{36} \\ 0 & 0 & 0 & \pi_{44} & \pi_{45} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \pi_{54} & \pi_{55} & 0 \\ \pi_{61} & \pi_{62} & \pi_{63} & 0 & 0 & \pi_{66} \end{matrix}$	20
$3m$, 32, $\bar{3}m$	$\begin{matrix} \pi_{11} & \pi_{12} & \pi_{13} & \pi_{14} & 0 & 0 \\ \pi_{12} & \pi_{11} & \pi_{13} & -\pi_{14} & 0 & 0 \\ \pi_{31} & \pi_{31} & \pi_{33} & 0 & 0 & 0 \\ \pi_{41} & -\pi_{41} & 0 & \pi_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \pi_{44} & -\pi_{41} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \pi_{14} & (\pi_{11}-\pi_{12}) \end{matrix}$	8	*Triclinic*	$\begin{matrix} \pi_{11} & \pi_{12} & \pi_{13} & \pi_{14} & \pi_{15} & \pi_{16} \\ \pi_{21} & \pi_{22} & \pi_{23} & \pi_{24} & \pi_{25} & \pi_{26} \\ \pi_{31} & \pi_{32} & \pi_{33} & \pi_{34} & \pi_{35} & \pi_{36} \\ \pi_{41} & \pi_{42} & \pi_{43} & \pi_{44} & \pi_{45} & \pi_{46} \\ \pi_{51} & \pi_{52} & \pi_{53} & \pi_{54} & \pi_{55} & \pi_{56} \\ \pi_{61} & \pi_{62} & \pi_{63} & \pi_{64} & \pi_{65} & \pi_{66} \end{matrix}$	36

Scanned with OKEN Scanner

pentru cristale de halogenuri alcaline valori absolute de ordinul 10^{-12} unităţi electrostatice, iar ceilalţi au 10^{-1} unităţi electrostatice.

Pe lîngă efectul electrooptic liniar, care este propriu doar cristalelor piezoelectrice, toate cristalele dielectricilor prezintă şi *efect electrooptic pătratic*. Acesta constă în variaţia proprietăţilor optice ale cristalelor proporţional cu pătratul intensităţii cîmpului electric E^2 sau al polarizării P^2

$$\left.\begin{aligned} \Delta a_{ij} &= L_{ijkl} E_k E_l ; \\ \Delta a_{ij} &= M_{ijkl} P_k P_l \end{aligned}\right\} \qquad (3.77)$$

unde L şi M sînt coeficienţii efectului electrooptic pătratic şi reprezintă tensori de ordinul patru. Coeficienţii acestor tensori, analog coeficienţilor care descriu fotoelasticitatea, sînt permutabili în raport cu indicii interni i, j şi k, l, dar nepermutabili faţă de perechile de indici.

Folosind notaţiile date în acest paragraf pentru mărimile a_{ij} cînd se trece la un singur indice şi notaţiile: $E_1E_1 = E_1^2$; $E_2E_2 = E_2^2$; $E_3E_3 = E_3^2$; $E_3E_2 = E_2E_3 = E_4^2$; $E_1E_3 = E_3E_1 = E_5^2$; $E_1E_2 = E_2E_1 = E_6^2$, obţinem scrierea matriceală a primei dintre ecuaţiile (3.77)

$$\begin{array}{c|cccccc} & E_1^2 & E_2^2 & E_3^2 & E_4^2 & E_5^2 & E_6^2 \\ \Delta a_1 & L_{11} & L_{12} & L_{13} & L_{14} & L_{15} & L_{16} \\ \Delta a_2 & L_{21} & L_{22} & L_{23} & L_{24} & L_{25} & L_{26} \\ \Delta a_3 & L_{31} & L_{32} & L_{33} & L_{34} & L_{35} & L_{36} \\ \Delta a_4 & L_{41} & L_{42} & L_{43} & L_{44} & L_{45} & L_{46} \\ \Delta a_5 & L_{51} & L_{52} & L_{53} & L_{54} & L_{55} & L_{56} \\ \Delta a_6 & L_{61} & L_{62} & L_{63} & L_{64} & L_{65} & L_{66} \end{array} \qquad (3.78)$$

Analog se poate scrie şi a doua ecuaţie (3.77). Cu notaţiile considerate aici pentru mărimile Δa_{ij}, E_m, E_n, P_m, P_n, matricele coeficienţilor L şi M coincid pe deplin cu matricele coeficienţilor electrooptici (vezi tabelul 24).

Evident, efectul pătratic poate fi şi el împărţit în real şi fals. *Efecctul electrooptic pătratic real* constă în variaţia constantelor de polarizare proporţional cu pătratul cîmpului aplicat (polarizării), ca rezultat al acţiunii nemijlocite a cîmpului electric asupra sarcinilor dielectricului. Astfel, efectul electrooptic pătratic nu este legat de deformaţia cristalului, care apare, în urma aplicării cîmpului electric (schimbării polarizării), ca rezultat al piezoefectului sau electrostricţiunii. Prin

Scanned with OKEN Scanner

efect electrooptic pătratic fals se înţelege variaţia constantelor dielectrice, proporţională cu pătratul cîmpului electric (polarizării), ce apare datorită deformaţiei cristalelor prin electrostricţiune.

Efectul electrooptic pătratic (ca şi electrostricţiunea), fiind un efect de ordinul doi, produce în general variaţii mici (în comparaţie cu efectul electropotic liniar) ale proprietăţilor optice ale dielectricilor. Pe lîngă acesta, în cazul lichidelor polare, la care efectul electrooptic liniar se numeşte *efect Kerr*, şi în cazul segnetoelectricilor acest efect poate fi important (ca şi electrostricţiunea). La cristalele dielectricilor liniari. care prezintă piezoefect, efectul electrooptic pătratic poate fi neglijat în comparaţie cu cel liniar. Menţionăm că, datorită efectului electrooptic pătratic într-un cîmp electric variabil, de frecvenţă f, proprietăţile optice ale unui cristal variază cu frecvenţa $2f$. Un interes deosebit îl prezintă efectul electrooptic pătratic în cazul cristalelor cubice centrosimetrice şi al lichidelor polare, care — în absenţa cîmpului — au acelaşi indice de refracţie şi pot fi folosite pentru fabricarea celulelor Kerr (modulatori optici, „poartă"). În cazul segnetoelectricilor coeficienţii M au valori de ordinul 10^{-12} unităţi electrostatice.

Deformaţia unui dielectric $[r_{ij}]$. proporţională cu pătratul cîmpului aplicat E, se numeşte *electrostricţiune*

$$r_{ij} = R_{ijmn}E_mE_n$$

unde R_{ijmn} este coeficientul de electrostricţiune (tensor polar de ordinul patru). Folosind pentru partea electrică inducţia D iar pentru cea mecanică tensiunile $[t_{ij}]$, se pot introduce încă trei coeficienţi de electrostricţiune. În particular, relaţia care leagă $[t_{ij}]$ şi E are forma

$$t_{ij} = H_{ijmn}E_mE_n \tag{3.79}$$

unde H_{ijmn} este, de asemenea, un coeficient de electrostricţiune.

Tensorii $[H_{ijmn}]$ şi $[R_{ijmn}]$ sînt analogii tensorilor piezooptic şi elastooptic $[\pi]$ şi $[p]$. Ei sînt permutabili faţă de perechile de indici interni

$$H_{ijmn} = H_{ijnm} = H_{jimn} = H_{jinm}$$

dar nu şi faţă de perechile de indici (în cazul general)

$$H_{ijmn} \neq H_{mnij}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Trecînd la scrierea matriceală, relaţiile dintre coeficienţi au forma

$R_{mn} = R_{ijkl}$ dacă atît m, cît şi n sînt egali cu 1, 2, 3;

$R_{mn} = 2R_{ijkl}$ dacă m sau n este egal cu 1, 2, 3;

$R_{mn} = 4R_{ijkl}$ dacă atît m, cît şi n sînt egali cu 4, 5, 6.

Pentru H relaţiile sînt întrucîtva diferite

$$H_{mn} = H_{ijkl} \quad \text{cînd} \quad n = 1, 2, 3;$$

$$H_{mn} = 2H_{ijkl} \text{ cînd } n = 4, 5, 6.$$

Astfel, matricele coeficienţilor H_{mn} coincid în întregime cu matricele coeficienţilor piezooptici π (vezi tabelul 24).

Electrostricţiunea nu trebuie confundată cu efectul piezoelectric invers. Ultimul, aşa cum s-a remarcat în paragraful precedent, este de asemenea rezultatul aplicării cîmpului extern, dar nu va fi efect liniar (deformaţie direct proporţională cu cîmpul), ci electrostricţiune (efect pătratic). Aceasta înseamnă, în particular, că semnul electrostricţiunii (adică faptul că cristalul se dilată sau se comprimă în cîmpul electric aplicat) nu depinde de intensitatea cîmpului, în timp ce în cazul efectului piezoelectric inversarea sensului cîmpului produce schimbarea semnului deformării.

Ca rezultat al electrostricţiunii, un cristal aflat în cîmp variabil vibrează cu o frecvenţă de două ori mai mare decît frecvenţa cîmpului, iar ca rezultat al piezoefectului frecvenţa cîmpului şi a deformaţiei coincid. Electrostricţiunea se datoreşte deplasării sarcinilor sub acţiunea cîmpului şi are loc pentru toţi dielectricii, independent de simetria lor. Efectul piezoelectric are loc însă, după cum s-a arătat mai înainte, numai în cazul cristalelor centrosimetrice. Cantitativ, deformaţia electrostrictivă, datorită efectului pătratic, este mai redusă decît cea piezoelectrică. Trebuie să mai arătăm că în unele cristale piezoelectrice cîmpul aplicat după anumite direcţii nu duce la deformaţie piezoelectrică (vezi tabelul 21); în acest caz, în piezoelectric se va produce numai deformaţia electrostrictivă. În cristalele centrosimetrice, electrostricţiunea apare „sub formă pură" şi nu este mascată de efectul piezoelectric.

Deformaţiile electristrictive, care apar în cristalele dielectricilor sub influenţa cîmpului electric, sînt foarte mici şi au

Scanned with OKEN Scanner

putut fi observate direct abia nu demult *. Valorile coeficienților în cazul sării de bucătărie, de exemplu, sînt de ordinul 10^{-12} unități electrostatice. La segnetoelectrici, atunci cînd există domenii, deformațiile electrostrictive pot fi mai mari cu cîteva ordine, datorită posibilității de a modifica de două ori orientarea polarizării spontane a domeniilor într-o perioadă completă de variație a cîmpului. Concret, în acest caz o electrostricțiune puternică se datorește efectului piezoelectric.

3.6. METODELE TEORIEI GRUPURILOR ÎN CRISTALOGRAFIA TENSORIALĂ

a) INTRODUCERE

O serie de probleme ale cristalofizicii tensoriale se rezolvă cel mai bine cu ajutorul acelor părți din teoria grupurilor care formează conținutul *teoriei reprezentărilor* și *teoriei caracterelor*. Cu ajutorul teoriei grupurilor pot fi găsite formele tensiunilor care descriu diverse proprietăți fizice, pot fi determinați invariații de diferite ordine, se poate stabili numărul coeficienților independenți diferiți de zero ai tensorilor ș.a.m.d.

Teoria reprezentărilor studiază transformarea grupurilor în grupuri ale operatorilor liniari (matricelor). Dacă un grup G, compus din elementele $g_0, g_1, g_2, \ldots$ și grupul H de matrice $\tau_0, \tau_1, \tau_2, \ldots$ sînt astfel încît fiecărui element g_j îi corespunde matricea τ_i și produsului $g_i g_j$ îi corespunde produsul a două matrice respective, atunci se spune că grupul de matrice H definește reprezentarea T a grupului G. Una dintre aceste matrice poate să corespundă cîtorva elemente ale grupului, dar fiecărui element al grupului trebuie să-i corespundă numai o singură matrice din H.

În cazul grupurilor de simetrie punctuale noțiunea de „reprezentare a grupului" capătă un sens mai concret. Într-adevăr, elementele grupurilor punctuale (operațiile de simetrie) reprezintă operatori liniari în spațiul tridimensional (matricele

---

*Jeludev., I. S., Fotcenkov, A. A., *Electrostricțiunea dielectricilor liniari*, Kristalografia, 3, 308, 1958.

* Elemente de teoria grupurilor au fost expuse în § 1.1. O expunere fundamentală a aplicării teoriei grupurilor la studierea proprietăților fizice se poate găsi în cărțile: Bhagavantam, S., Venktaraiydu, R., *Teoria grupurilor și aplicarea ei la probleme fizice*, Izd. inostr. lit., Moscova, 1959; Liubarski, G. Iu., *Teoria grupurilor și aplicarea ei în fizică*, Gostehizdat, Moscova, 1957.

care descriu rotaţiile şi rotaţiile cu oglindire) şi, de aceea, fiecare grup punctual se reprezintă pe sine însuşi. Această reprezentare se numeşte adeseori *vectorială* şi dimensiunile sale sînt egale cu trei.

În general, unul şi acelaşi grup poate fi reprezentat de matrice diferite. Avînd dată o reprezentare oarecare, este important de ştiut dacă ea este *reductibilă* sau *ireductibilă*. Reprezentarea T a grupului G în spaţiul L numeşte reductibilă dacă în L există cel puţin un subspaţiu L_1 netrivial, invariant în raport cu toţi operatorii (matricele) $\tau(g)$ $(g \in G)$. Invarianţa faţă de toţi operatorii înseamnă că acţiunea acestora asupra vectorilor subspaţiului L_1 face ca aceşti vectori să rămînă în L_1. Un exemplu simplu este reprezentarea grupului 422. Spaţiul vectorial tridimensional se descompune în două subspaţii invariante faţă de acest grup: un spaţiu unidimensional, compus din vectorii orientaţi de-a lungul axei Z şi altul bidimensional, compus din vectorii situaţi în plan orizontal.

Dacă în spaţiul L nu se poate separa nici un subspaţiu L_1 netrivial, invariant în raport cu toţi operatorii corespunzători operaţiilor grupurilor, atunci spaţiul se numeşte ireductibil. De aici rezultă, în particular, că toate reprezentările unidimensionale sînt ireductibile.

Astfel, fiecare reprezentare ireductibilă poate fi scrisă sub formă de sumă a unor reprezentări reductibile. În acest caz spaţiul L apare descompus într-o sumă de subspaţii invariante ortogonale $L_1, L_2, \ldots$, fiecare dintre acestea transformîndu-se după o reprezentare ireductibilă. Dacă printre aceste subspaţii există cîteva, să zicem n_i, subspaţii care se transformă după reprezentări echivalente cu o aceeaşi reprezentare inductibilă τ_i, atunci se spune că reprezentarea τ_i este conţinută în reprezentarea reductibilă T de n_i ori. În teoria grupurilor se arată că numărul de reprezentări ireductibile diferite ale unui grup este egal cu numărul claselor de elemente conjugate ale grupului (vezi § 1.3).

Să ne oprim asupra reprezentărilor cîtorva grupuri cristalografice. Cele mai simple sînt grupurile cu o singură axă de simetrie C_n: 1, 2, 3, 4, 6. Aceste grupuri sînt abeliene (rezultatul nu depinde de permutarea a două elemente în produsul lor) şi toate reprezentările lor ireductibile sînt unidimensionale. Numărul lor este egal cu ordinul grupului. În cazul acestor grupuri ansamblul reprezentărilor τ este determinat de relaţia

$$\tau_k(C_n^m) = e^{2\pi i k m/n} \quad (k, m = 0, 1, 2, \ldots, n-1) \qquad (3.80)$$

Scanned with OKEN Scanner

care descrie, în ultimă instanță, matricea corespunzătoare rotației figurii cu un arc de circumferință corespunzător, în jurul unei direcții date.

Grupului 1 îi corespunde o reprezentare unidimensională, definită de numărul 1 [în formula (3.80), $n = 1$, $k = 0$, $m = 0$]. Pentru grupul 2, din (3.80) rezultă două reprezentări ($n = 2$, $k = 0$, $m = 0$; $k = 0$, $m = 1$; $k = 1$, $m = 0$; $k = 1$, $m = 1$)

$$\begin{array}{lcc} & 1(m=0) & 2(m=1) \\ \tau_0(k=0) & 1 & 1 \\ \tau_0(k=0) & 1 & -1 \end{array} \qquad (3.81)$$

Folosind aceeași formulă (3.80) obținem ușor și reprezentările grupului 3

$$\begin{array}{lccc} & 1(m=0) & 3(m=1) & 3^{-1}(m=2) \\ \tau_0(k=0) & 1 & 1 & 1 \\ \tau_1(k=1) & 1 & e^{2\pi i/3} & e^{4\pi i/3} \\ \tau_2(k=2) & 1 & e^{4\pi i/3} & e^{2\pi i/3} \end{array} \qquad (3.82)$$

Reprezentările altor grupuri sînt mai complicate și, întrucît în cartea de față acest paragraf referitor la teoria grupurilor nu reprezintă un scop în sine, nu le vom analiza aici, deci nici nu le vom da.

În reprezentarea matriceală se numește *caracter* al unui element R al unui grup $[f(R)]$, urma matricei corespunzătoare (suma coeficienților diagonali). Această noțiune este deosebit de utilă; tablourile de caractere ale reprezentărilor ireductibile ale grupurilor sînt frecvent folosite în cristalografia tensorială. Vom enumera cîteva dintre proprietățile caracterelor: în cazul reprezentărilor echivalente, caracterele coincid; pătratul scalar al caracterului unei reprezentări ireductibile este egal cu unitatea; caracterul unei reprezentări ireductibile este egal cu suma caracterelor tuturor reprezentărilor ireductibile din care este formată această reprezentare (considerînd-o pe fiecare de atîtea ori de cîte este conținută).

Tablourile de caractere ale reprezentărilor ireductibile se întocmesc pe baza tabelelor reprezentărilor înseși. Astfel, din

Scanned with OKEN Scanner

(3.81) rezultă că pentru clasa 2, tabloul caracterelor va avea forma

$$\begin{array}{cc} & 1 \quad 2 \\ A & 1 \quad 1 \\ B & 1 \quad -1 \end{array} \tag{3.83}$$

unde A și B sînt reprezentările inductibile ale grupului 2. Pentru grupul 3, din (8.82) rezultă

$$\begin{array}{cccc} & 1 & 3 & 3^{-1} \\ A & 1 & 1 & 1 \\ E & \left\{\begin{array}{l}1\end{array}\right. & \varepsilon & \varepsilon^* \\ E & \left\{\begin{array}{l}1\end{array}\right. & \varepsilon^* & \varepsilon, \text{ unde } \varepsilon = \exp(2\pi i/3). \end{array} \tag{d.84}$$

d) GEOMETRIA BAZELOR REPREZENTĂRILOR IREDUCTIBILE ȘI UNII INVARIANȚI AI GRUPURILOR CRISTALOGRAFICE

Studiul reprezentărilor ireductibile ale grupurilor cristalografice arată că pentru fiecare grup pot fi găsite imagini geometrice care se transformă în concordanță cu tablourile de caractere ale grupurilor. Sensul expresiei, „în concordanță" se reduce la următoarele : dacă imaginea geometrică se transformă în sine însăși printr-o operație de simetrie, transformării respective îi corespunde în tabelul caracterelor unitatea (1), iar dacă imaginea își inversează semnul îi corespunde unitatea cu semnul minus (—1). Imaginile geometrice menționate sînt *baze* ale reprezentărilor ireductibile.

În cazul bazelor descrise de tensori de ordinul doi, adică bazele scalare, vectoriale și tensoriale propriu-zise, expresia „își inversează semnul" înseamnă din punct de vedere geometric că : a) un pseudoscalar își schimbă semnul de enantiomorfism (de exemplu, din drept devine stîng) ; b) vectorii polar și axial își inversează sensul ; c) componentele unui tensor polar își inversează mărimile pe care le descriu (de exemplu, se schimbă simbolul geometric ce ilustrează întinderea cu simbolul comprimării) ; d) componentele unui tensor axial își schimbă semnul de enantiomorfism. În cadrul simetriei obișnuite, un scalar nu-și

Scanned with OKEN Scanner

schimbă semnul („culoarea") pentru nici o operație de simetrie*.

Vom analiza, ca exemplu, grupul $2/m$, pentru care caracterele și imaginile geometrice (bazele) ale reprezentărilor ireductibile sînt date în tabelul 25. Din tabel se vede că reprezentării unitate A_g îi corespund baze scalară, axial-vectorială și polar-tensorială. Aici axa vectorului axial coincide cu axa 2 a cristalului, iar vectorul polar poate avea componente „de deplasare" numai într-un plan perpendicular pe această axă ($a_{xy} = a_{yx} = a_{xy}$). În reprezentarea B, de exemplu, vectorul axial este perpendicular pe axa 2, iar vectorul polar nu are componente „de deplasare" în planul XY. Caracteristicile geometrice ale bazelor reprezentărilor grupurilor 2, $\bar{4}$, $3m$ și $\bar{4}3m$ se pot vedea în tabelele 26—29. Tabelele pentru celelalte grupuri cristalografice sînt date în Anexa II.

În tabelele enumerate sînt trecute, pe lîngă imaginile geometrice, și expresia analitică corespunzătoare. Pentru componentele tensorilor axiali se folosesc simbolurile A_{ij}, iar pentru componentele tensorilor polari — simbolurile a_{ij}. Scalarul și pseudoscalarul sînt considerați ca tensori de forma

$$\begin{bmatrix} 0 & -A_{12} & 0 \\ A_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{11} & 0 \\ 0 & 0 & a_{11} \end{bmatrix} \tag{3.85}$$

Vectorii polari și axial se scriu, respectiv, ca tensori antisimetric

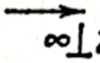
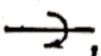
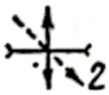
$$\begin{bmatrix} 0 & -a_{12} & 0 \\ a_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} A_{11} & 0 & 0 \\ 0 & A_{11} & 0 \\ 0 & 0 & A_{11} \end{bmatrix} \tag{3.86}$$

* Legătura menționată dintre imaginile geometrice și caracterele reprezentărilor unidimensionale este evidentă. În cazul reprezentărilor bidimensionale și tridimensionale această legătură nu este totdeauna intuitivă. În particular, trebuie să se țină seama că pentru rotații (simple și cu oglindire) de $\pi/2$, $2\pi/3$ și $2\pi/6$, valorile caracterelor sînt determinate respectiv de $\exp(\pm \pi i/2)$, $\exp(\pm 2\pi i/3)$, $\exp(\pm 2\pi i/6)$. De exemplu unei rotații a imaginii cu 90° îi corespunde valoarea caracterului i. În acest caz, caracterul *se conservă și nu-și schimbă semnul*. Totuși, fiecărei reprezentări i se poate face să-i corespundă imagini determinate, pentru care legătura dintre geometrii și oricare dintre caractere este intuitivă.

Tabelul 25

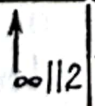
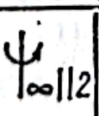
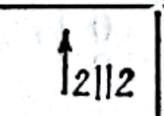
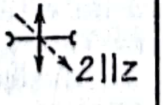
Bazele reprezentărilor ireductibile ale diferitelor grupuri

$C_{2h} = 2/m,\ Z \| 2$

Scalar	Pseudoscalar	Vector polar	Vector axial	Tensor polar de ordinul doi	Tensor axial de ordinul doi	Reprezentarea	Operația de simetrie 1	2	m	c
a			$\pm a_{xy}$	$a_{xx}, a_{yy}, a_{zz}, a_{xy}$		A_g	1	1	1	1
	A	$\pm A_{xy}$			$A_{xx}, A_{yy}, A_{zz}, A_{xy}$	A_u	1	1	-1	-1
		 $\pm A_{xz}, \pm A_{yz}$			$A_{xz}, A_{zx}=A_{xz}$ $A_{yz}, A_{zy}=A_{yz}$	B_u	1	-1	1	-1
			 $\pm a_{xz}, \pm a_{yz}$	 $a_{xz}, a_{zx}=a_{xz}$ $a_{yz}, a_{zy}=a_{yz}$		B_g	1	-1	-1	1

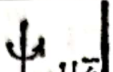
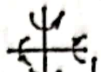
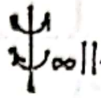
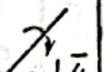
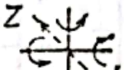
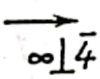
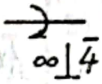
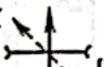
Tabelul 26

$C_2 = 2,\ Z \| 2$

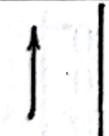
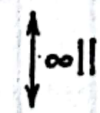
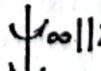
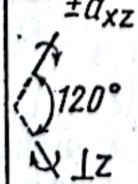
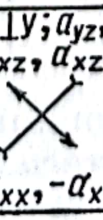
Scalar	Pseudoscalar	Vector polar	Vector axial	Tensor polar de ordinul doi	Tensor axial de ordinul doi	Reprezentarea	Operația de simetrie 1	2
a	A	 $\pm A_{xy}$	 $\pm a_{xy}$	 $a_{xx}, a_{yy}, a_{zz}, a_{xy}$	$A_{xx}, A_{yy}, A_{zz}, A_{xy}$	A	1	1
		$\pm A_{xz}, \pm A_{yz}$	$\pm a_{xz}, \pm a_{yz}$	 $a_{yz}, a_{zy}=a_{yz}$ $a_{xz}, a_{zx}=a_{xz}$	$A_{yz}, A_{zy}=A_{yz}$ $A_{xz}, A_{zx}=A_{xz}$	B	1	-1

Scanned with OKEN Scanner

$S_4 = \bar{4},\ Z \parallel \bar{4}$

Scalar	Pseudoscalar	Vector polar	Vector axial	Tensor polar de ordinul doi	Tensor axial de ordinul doi	Reprezentarea	Operația de simetrie: 1	4	2	$\bar{4}^{-1}$
a			 $\pm a_{xy}$	a_{xx}, a_{xx}, a_{zz}	 $A_{xx}, -A_{xx}, A_{xy}$	A	1	1	1	1
	A	$\pm A_{xy}$		$a_{xx}, -a_{xx}, a_{xy}$	 A_{xx}, A_{xx}, A_{zz}	B	1	-1	1	-1
		$\pm A_{xz}$	 $\pm a_{xz}$	$a_{xz}, a_{zx}=a_{xz}$	 $A_{xz}, A_{zx}=A_{xz}$	E	1	i	-1	$-i$
		 $\pm A_{yz}$	 $\pm a_{yz}$	 $a_{yz}, a_{zy}=a_{yz}$	$A_{yz}, A_{zy}=A_{yz}$	E	1	$-i$	-1	i

$C_{3v} = 3m,\ Z \parallel 3,\ X \parallel m$

Scalar	Pseudoscalar	Vector polar	Vector axial	Tensor polar de ordinul doi	Tensor axial de ordinul doi	Reprezentarea	Operația de simetrie: 1	3, 3^{-1}	m, m, m
a		 $\pm A_{xy}$		 a_{xx}, a_{xx}, a_{zz}		A_1	1	1	1
	A		$\pm a_{xy}$		 A_{xx}, A_{xx}, A_{zz}	A_2	1	1	-1
		$\pm A_{yz}$ 120° $\perp Z$	 $\pm a_{xz}$ 120° $\perp Z$	 $\perp X, \perp Y; a_{yz}, a_{yz}$ a_{xz}, a_{xz} $\perp Z$ $a_{xx}, -a_{xx}$	$\perp X, \perp Y; A_{yz}, A_{yz}$ A_{xz}, A_{xz} $\perp Z$ $A_{xx}, -A_{xx}$	E	2	-1	0

Scanned with OKEN Scanner

$T_d = \bar{4}3m$

Scalar	Pseudoscalar	Vector polar	Vector axial	Tensor polar de ordinul doi	Tensor axial de ordinul doi	Reprezentarea	Operația de simetrie				
							1	$\bar{4}$	2	3	m
a						A_1	1	1	1	1	1
	A					A_2	1	-1	1	1	-1
				⊥x, ⊥y, ⊥z $a_{xx}, -a_{xx}$ $a_{yy}, -a_{yy}$ $a_{zz}, -a_{zz}$	⊥x, ⊥y, ⊥z $A_{xx}, -A_{xx}$ $A_{yy}, -A_{yy}$ $A_{zz}, -A_{zz}$	E	2	0	2	-1	0
			$\pm a_{xy}$ $\pm a_{yz}, \pm a_{xz}$		⊥x, ⊥y, ⊥z $A_{xy}, A_{yx}=A_{xy}$ $A_{yz}, A_{zy}=A_{yz}$ $A_{xz}, A_{zx}=A_{xz}$	T_1	3	1	-1	0	-1
		$\pm A_{xy}$ $\pm A_{yz}, \pm A_{xz}$		⊥x, ⊥y, ⊥z $a_{xy}, a_{yx}=a_{xy}$ $a_{yz}, a_{zy}=a_{yz}$ $a_{xz}, a_{zx}=a_{xz}$		T_2	3	-1	-1	0	1

Este interesant de remarcat faptul că tensorii simetrici

$$\begin{bmatrix} 0 & A_{12} & 0 \\ A_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & a_{12} & 0 \\ a_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{3.87}$$

după rotația sistemului de coordonate în jurul axei Z cu 45° vor avea, respectiv, forma

$$\begin{bmatrix} A_{11} & 0 & 0 \\ 0 & -A_{11} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} a_{12} & 0 & 0 \\ 0 & -a_{11} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{3.88}$$

Imaginile geometrice ale primului rînd („unitate") al reprezentărilor ireductibile sînt *invarianți* pentru fiecare dintre grupuri. Evident, și expresiile analitice ale acestor imagini sînt

Scanned with OKEN Scanner

tot invarianţi. Să scriem cîteva dintre ele (vezi tabelele 25—29). Pentru grupul 2 invarianţii sînt *

$$\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{11} & 0 \\ 0 & 0 & a_{11} \end{bmatrix}^{**}, \quad \begin{bmatrix} A_{11} & 0 & 0 \\ 0 & A_{11} & 0 \\ 0 & 0 & A_{11} \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & -A_{12} & 0 \\ A_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 0 & -a_{12} & 0 \\ a_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 \\ a_{12} & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 \\ A_{12} & A_{22} & 0 \\ 0 & 0 & A_{33} \end{bmatrix}.$$

Pentru grupul $\bar{4}$ invarianţii sînt

$$\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{11} & 0 \\ 0 & 0 & a_{11} \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & -a_{12} & 0 \\ a_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{11} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 \\ A_{12} & -A_{11} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Aşadar, tabelele care conţin imaginile geometrice (ca tabelele 25—29) ne dau posibilitatea de a scrie imediat invarianţii tuturor grupurilor (pînă la tensorii polari şi axiali de ordinul doi menţionaţi) şi de a stabili — după specificul lor — unele proprietăţi ale cristalelor. Cel mai simplu exemplu : din tabele rezultă imediat posibilitatea polarizării spontane la clasele 1, 2, 3, 4, $\bar{6}$, m, $mm2$, $3m$, $4mm$, $6mm$ şi a magnetizării spontane la clasele $\bar{1}$, 1, 2, m, $2/m$, 4, $\bar{4}$, $4/m$, 3, $\bar{3}$, 6, $\bar{6}$, $6/m$ atunci cînd în reprezentările lor unitate există, respectiv, componente polar-vectoriale şi axial-vectoriale.

Invarianţii diferiţi de zero, descrişi de tensori axiali de ordinul doi, există la clasele de cristale *** : 1, 2, m, 222, $mm2$, $\bar{4}$, 4, 422, $\bar{4}2m$, $4mm$, 3, 32, $3m$, 6, 622, $6mm$, 23, 432 (vezi tabelele 25—29 şi Anexa II). Tensorul leagă vectorii polar şi axial şi, în particular, descrie efectul magnetoelectric în cristale. La 15 dintre clasele de cristale enumerate, care au componente ale părţii simetrice a tensorului axial de ordinul doi diferite de zero, este posibilă activitatea optică (vezi § 3.3). Analog,

---

* Indicii axelor X, Y şi Z sînt, respectiv, 1, 2, 3.

** Invariantul scalar apare la toate grupurile.

*** Natural, componentele vectorului polar sînt considerate ca o parte a componentelor tensorului axial propriu-zis.

analizînd tensorii polari de ordinul doi, se pot scrie caracteristicile dilatării termice, ale conductibilităţii electrice a cristalelor tuturor claselor ş.a.m.d.

Invarianţii de ordinul trei — tensorii de ordinul trei — definesc legătura dintre vectorii şi tensorii de ordinul doi (vezi § 3.4).

Folosirea tabelelor de baze (vezi tabelele 25—29) permite să se scrie destul de simplu invarianţii de ordinul trei, adică să se găsească coeficienţii diferiţi de zero ai unui tensor de ordinul trei. Evident, dacă la o grupă sînt invariante componenta vectorială b_i şi componenta tensorială k_{ij}, atunci în tensorul de ordinul trei care le leagă vor fi invariante componentele d_{ijk} şi d_{jki}, deoarece pentru descrierea efectelor „directe" şi „inverse" indicele i poate la fel de bine să fie aşezat atît înaintea indicilor jk, cît şi după ei ($i, j, k = 1, 2, 3$).

Vom începe cu analizarea efectului piezoelectric. Pentru clasa 2, de exemplu, din primul rînd al tabelului 26 se vede că sînt invariante componenta polar-vectorială a_3 (componentele $\pm A_{12}$ ale tensorului axial definesc componenta orientată după axa X_3 a vectorului polar) şi componentele polar-tensoriale a_{11}, a_{22}, a_{33}, a_{12}, a_{21}. Ultimii doi termeni din tensor nu sînt egali, deoarece $a'_{12} + a''_{12} \neq a'_{12} - a''_{12}$ (componentele vectorului axial s-au notat cu $\pm a''_{12}$, iar componentele de deplasare ale tensorului propriu-zis cu a'_{12}). Compunerea indicilor vectorului şi tensorului dă mărimi invariante cu indicii 311, 322, 333, 312, 321, 113, 223, 123, 213. După reducerea termenilor „asemenea", ţinînd seama că componentele tensorului sînt considerate simetrice în forma matriceală ($k_{jk} = k_{kj}$) şi după introducerea notaţiilor *: $k_{11} = k_1$; $k_{22} = k_2$; $k_{33} = k_3$; $k_{23} = k_{32} = k_4$; $k_{31} = k_{13} = k_5$; $k_{12} = k_{21} = k_6$, obţinem rezultatul că pentru clasa 2 sînt diferiţi de zero opt piezocoeficienţi ai matricei: d_{31}, d_{32}, d_{33}, d_{36}, d_{15}, d_{24}, d_{14}, d_{25}. Această matrice are forma

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & d_{14} & d_{15} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d_{24} & d_{25} & 0 \\ d_{31} & d_{32} & d_{33} & 0 & 0 & d_{36} \end{pmatrix} \qquad (3.89)$$

şi coincide cu matricea (3.45) obţinută prin metoda determinării directe a coeficienţilor diferiţi de zero [bineînţeles, cu luarea în consideraţie a faptului că în expresia (3.45) axa 2 s-a luat drept axă Y].

* Această regulă de notare corespunde, la piezoefect, notaţiei componentelor tensorului tensiunilor mecanice.

Scanned with OKEN Scanner

Prin metoda indicată se pot determina cu uşurinţă coeficienţii piezoelectrici diferiţi de zero pentru toate clasele piroelectrice (1, 2, 3, 4, 6, m, $mm2$, $3m$, $4mm$, $6mm$), deoarece la toate aceste clase în prima linie a tabelelor 25 — 29 se află componentele vectorului polar şi ale tensorului polar

La cristalele polar neutre (grupurile 222, $\bar{4}$, 422, $\bar{4}2m$, 32, $\bar{6}$, 622, $\bar{6}m2$, 23, $\bar{4}3m$, 432) se pot folosi alte reprezentări, în care să fie cuprinse şi componentele polar-vectoriale şi polar-tensoriale. De exemplu, pentru clasa $\bar{4}$ vom utiliza în acest scop reprezentarea B, în care sînt diferite de zero componenta polar-vectorială a_3 şi componentele polar-tensoriale a_{11}, $a_{22} = -a_{11}$, a_{12} şi $a_{21} = 2_{12}$. Permutarea indicilor dă în acest caz : 311, 322, 312, 321, 113, 223, 123, 213. În indici dubli acestora le corespund componentele 31, 32, 36, 15, 24, 14, 25. Ţinînd seama de relaţiile date aici, se verifică egalităţile $d_{13} = -d_{32}$; $d_{15} = -d_{24}$; $d_{14} = d_{25}$. Aşadar, matricea coeficienţilor piezoelectrici ai clasei $\bar{4}$ are patru coeficienţi independenţi şi se scrie sub forma (compară cu tensorii $[d_{ijk}]$ pentru această clasă, din tabelul 21)

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & d_{14} & d_{15} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -d_{15} & d_{14} & 0 \\ d_{31} & -d_{31} & 0 & 0 & 0 & d_{36} \end{pmatrix}. \qquad (2.90)$$

În clasele cristalografice $\bar{6}m2$, 32, $3m$, $\bar{6}$, 3 există direcţii perpendiculare pe axele de ordinul cel mai înalt (pentru clasa respectivă) : $\bar{6}$, $\bar{3}$, 3. Pentru aceste clase, tensorul piezoelectric poate fi găsit prin superpoziţia tensorului determinat de una dintre reprezentările unidimensionale cu tensorul determinat de o reprezentare bidimensională într-un plan perpendicular pe axa de cel mai înalt ordin (se consideră superpoziţia anumitor combinaţii ale mărimilor a_1, a_2 cu mărimile a_{11}, $a_{22} = -a_{11}$, a_{22}). Astfel, de exemplu, în clasa $3m$ (vezi tabelul 28) reprezentarea unidimensională A_1 (după cum se poate uşor arăta cu metoda folosită pentru clasele 2 şi $\bar{4}$) dă coeficienţii independenţi d_{31}, $d_{32} = d_{31}$, d_{33}, d_{24}, $d_{15} = d_{24}$, iar combinaţiile lui a_1 cu a_{11}, $a_{22} = -a_{11}$ din reprezentarea bidimensională E dau coeficienţii independenţi d_{11}, $d_{22} = -d_{11}$, $d_{26} = 2d_{22}$. Tensorul complet al coeficienţilor piezoelectrici, pentru clasa $3m$, are forma

$$\begin{pmatrix} d_{11} & -d_{11} & 0 & 0 & d_{15} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d_{15} & 0 & -2d_{11} \\ d_{31} & d_{31} & d_{33} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \qquad (3.91)$$

Pentru cristalele cubice nu există reprezentări unidimensionale care să conţină şi un vector polar, şi un tensor polar. În

cazul acestor cristale, folosind reprezentări tridimensionale și combinații ale uneia dintre componentele vectorului polar cu componentele, perpendiculare pe el, ale tensorului polar, se pot obține toți coeficienții piezoelectrici. Astfel, pentru clasa $\bar{4}3m$ (vezi tabelul 29) compunerea lui a_1 cu a_{23} și $a_{32} = a_{23}$ dă un tensor cu coeficienții piezoelectrici $d_{14} = d_{15} = d_{36}$ (ținînd seama că $a_1 = a_2 = a_3$; $a_{23} = a_{32} = a_{12} = a_{21} = a_{31} = a_{13}$).

Să analizăm invarianții descriși de tensorii axiali de ordinul trei. Cel mai bine studiat este fenomenul de piezomagnetism. În acest caz, componentele vectorului axial (cîmpul magnetic) sînt legate de componentele vectorului polar ce descrie deformația mecanică. Din tabelul 26 se vede că, în cazul clasei 2, reprezentarea A conduce la aceiași coeficienți k_{ijk} diferiți de zero atît pentru tensorul axial de ordinul trei, cît și pentru tensorul ploar de ordinul trei. Astfel, matricea piezomagnetică pentru clasa 2 coincide ca formă cu cea piezoelectrică [vezi (3.55)]

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & k_{14} & k_{15} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k_{24} & k_{25} & 0 \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} & 0 & 0 & k_{36} \end{pmatrix}. \qquad (3.92)$$

Din tabelul 25 (vezi reprezentarea A_g) se vede că pentru clasa $2/m$ matricea piezomagnetismului va fi aceeași ca și pentru clasa 2. Observăm că matricea (3.92) descrie piezomagnetismul și în clasa m. Tensorul piezomagnetic pentru clasa $\bar{4}$ poate fi găsit din reprezentarea A (vezi tabelul 27), iar pentru clasa $3m$ — din reprezentarea E (vezi tabelul 28). În niciuna dintre reprezentările clasei $\bar{4}3m$, vectorul axial nu se compune cu vectorul polar. Aceasta înseamnă că la această clasă de cristale piezomagnetismul nu este posibil.

În felul acesta, interpretarea dată aici bazelor reprezentărilor ireductibile conduce imediat la toți invarianții polari și axiali, pînă la invarianții de ordinul doi și permite să se găsească simplu invarianții de ordinul trei. În general, cu ajutorul metodei discutate se pot găsi și invarianți de ordine mai mari; totuși, în acest caz, metoda își pierde din simplitate și intuitivitate.

c) DETERMINAREA NUMĂRULUI DE COEFICIENȚI DIFERIȚI DE ZERO ÎN TENSORII CARE DESCRIU DIFERITE PROPRIETĂȚI ALE CRISTALELOR (METODA BHAGAVANTAM)*

Determinarea directă a formei tensorilor și a coeficienților independenți pentru o serie de proprietăți, descrise în mod

* Bhagavantam, S, *Cristal Symmetry and Physical Properties*, Academic Press, New York, 1966.

special de tensori de ordin mai înalt decît trei, este destul de complicată. Metoda elaborată de către Bhagavantam permite să se afle, cu ajutorul unor formule simple, numărul coeficienţilor diferiţi de zero în tensori de orice ordin, pentru proprietăţi şi clase de cristale diferite, ceea ce prezintă un interes deosebit. În afară de aceasta, cunoaşterea numărul de coeficienţi independenţi ai unui tensor permite să se verifice cu uşurinţă rezultatele obţinute prin alte metode.

În § 3.6,a s-a amintit că fiecare grup punctual poate fi reprezentat cu ajutorul matricelor care descriu transformările de simetrie (elementele grupurilor punctuale). Aceasta este aşa numita *reprezentare vectorială a unui grup.*

Se poate defini *reprezentarea tensorială* a unui grup. Într-adevăr, la transformările sistemului de coordonate al unui tensor, corespunzătoare operaţiilor de simetrie ale grupului considerat [vezi tabelul 8, formulele (3.36), (3.61) ş.a.], fiecare componentă a tensorului se transformă într-o combinaţie liniară a celorlalte. Ansamblul matricelor corespunzătoare tuturor operaţiilor de simetrie formează reprezentarea tensorială a grupului în cauză.

Dacă componentele unui tensor descriu o proprietate fizică a unui cristal, ele trebuie să-şi păstreze aceeaşi valoare numerică sau să rămînă invariante faţă de toate transformările simetriei cristalului. Această condiţie se aplică şi la combinaţiile lor liniare. Prin urmare, numai combinaţiile liniare ale componentelor tensorului care rămîn invariante la transformările simetriei cristalului pot avea valori numerice nenule. Toate celelalte combinaţii liniare trebuie să fie egale cu zero, întrucît numai cu această condiţie îşi pot conserva valoarea la transformările de simetrie ale grupului considerat al cristalului.

Pe de altă parte, dacă o componentă a unui tensor sau combinaţia ei cu celelalte componente este invariantă în raport cu toate transformările de simetrie, atunci matricea unei astfel de transformări este, pur şi simplu, cifra 1 şi poate fi considerată matrice unidimensională. Reprezentarea corespunzătoare acestei matrice se numeşte reprezentare *unitate* sau *complet simetrică.* De aici rezultă că numărul componentelor independente nenule ale tensorului subordonat unui grup punctual de simetrie al

Scanned with OKEN Scanner

cristalului este egal cu numărul n_i al reprezentării ireductibile complet simetrice (unitate) din reprezentarea reductibilă formată de matricele transformării componentelor tensorului, corespunzătoare transformărilor simetriei acestui grup punctual.

După cum se arată în teoria grupurilor, numărul n_i se determină cu formula

$$n_i = \frac{1}{N} \sum_{\rho} h_\rho f_\rho(R) f_i(R). \tag{3.93}$$

În această formulă n_i arată de cîte ori se întîlnește reprezentarea ireductibilă τ_i în reprezentarea T a grupului G de ordinul N (G — grupul punctual al cristalului, iar T — reprezentarea tensorială considerată; h_ρ — ordinul clasei ρ; R — un element de simetrie care aparține acestei clase); $f_i(R)$ — caracterul elementului R care aparține clasei ρ în reprezentarea τ_i. Deoarece în cazul dat reprezentarea considerată este complet simetrică, caracterul $f_i(R)$ este egal cu unitatea pentru toate R.

Astfel, în ultimă instanță n_i poate fi ușor găsit dacă se cunoaște caracterul $f_\rho(R)$. În cazuri simple, $f_\rho(R)$ poate fi găsit direct și reprezentat sub forma unei expresii generale, funcție de unghiul φ de rotație a sistemului de coordonate sau de rotație cu oglindire. De exemplu, în cazul rotației în jurul axei Z cu unghiul φ, componentele vectorului polar $\mathbf{P}$ se transformă după formulele *

$$\left.\begin{aligned} P_1 &= P_1 \cos\varphi + P_2 \sin\varphi; \\ P_2 &= -P_1 \sin\varphi + P_2 \cos\varphi; \\ P_3 &= \pm P_3. \end{aligned}\right\} \tag{3.94}$$

Caracterul matricei acestei transformări este

$$2\cos\varphi \pm 1. \tag{3.95}$$

Rezultă ușor că la transformările componentelor unui tensor polar de ordinul doi, caracterul matricei va fi egal cu

$$4\cos^2\varphi \pm 2\cos\varphi \tag{3.96}$$

ș.a.m.d. Pentru mărimi axiale toți coeficienții din formulele de tipul (3.94) se înmulțesc cu -1 în cazul operațiilor de rotație cu

* Cînd există două semne, plus se ia în cazul rotațiilor simple, iar minus în cazul celor cu oglindire.

Scanned with OKEN Scanner

oglindire. Astfel, de exemplu, caracterul matricei de transformare a componentelor unui axial vector în cazul rotaţiilor simple şi al rotaţiilor cu oglindire în jurul axei Z este egal cu $\pm 2 \cos \varphi + 1$.

Să analizăm un exemplu de determinare a numărului de coeficienţi independenţi nenuli folosind valorile caracterelor $f_\rho(R)$ calculate cu expresiile date în tabelul 30. Din acest tabel rezultă, de exemplu, că numărul n_i corespunzător pentru descrierea proprietăţilor elastice ale cristalelor este determinat de caracterul

$$f_\rho(R) = 16 \cos^4 \varphi \pm 8 \cos^3 \varphi - 4 \cos^2 \varphi + 1. \qquad (3.97)$$

Pentru clasa 1 numărul n_i va fi maxim şi, cum se vede uşor din (3.93) şi (3.97), este determinat de expresia

$$n_i = \frac{1}{1}[16 + 8 - 4 + 1)] = 21 \ (\cos \varphi = 1)$$

ceea ce corespunde numărului de coeficienţi independenţi ai tensorului elasticităţii pentru această clasă, dat în § 3.5 şi obţinut pe baza calculelor directe.

Pentru clasa *mmm* proprietăţile elastice vor fi descrise de nouă coeficienţi independenţi (vezi, de asemenea, tabelul 23). Acest număr se determină cu relaţiile (3.93) şi (3.97) ca suma

$$n_i = \frac{1}{8}(21 + 5 + 5 + 5 + 21 + 5 + 5 + 5) = 9$$

unde fiecare termen corespunde operaţiilor de simetrie ale grupului $(1, 2, 2', 2'', \bar{1}, m, m', m'')$.

Numărul maxim de coeficienţi independenţi conţinut în tensorii care descriu diferite proprietăţi fizice este dat în tabelul 30. În tabelul 31 sînt date numerele de coeficienţi independenţi din tensorii care descriu aceleaşi proprietăţi fizice la toate clasele de cristale. Comparînd tabelele 16—24 cu tabelul 31 se poate constata deplina concordanţă a datelor conţinute în ele. Pentru proprietăţile descrise de vectori şi tensori de ordinul doi datele din tabelul 31 se corelează cu tabelele 25—29 şi Anexa II.

Scanned with OKEN Scanner

Tabelul 30

Caracterele reprezentărilor $f_\rho(R)$ și numărul maxim de coeficienți independenți în tensorii care descriu diferite proprietăți fizice (după Bhagavantam)

Nr. crt.	Proprietatea (fenomenul	Tipul de legătură a mărimilor tensoriale	Ordinul tensorului	Caracterul	Nr. maxim de coeficienți independenți
1	Piroelectricitate	Scalar-vector polar	1	$2c \pm 1$	3
2	Piromagnetism	Scalar-vector axial	1	$\pm 2c + 1$	3
3	Dilatare termică	Scalar-tensor polar de ordinul doi, simetric	2	$4c^2 \pm 2c$	6
4	Activitate optică	Tensor polar-vector axial ($\rho_{ik} = \rho_{ki}$)	2	$\pm 4c + 2c$	6
5	Polarizare electrică, electroconductibilitate	Vector polar-vector polar	2	$(2c \pm 1)^2$	9
6	Efect magnetoelectric	Vector polar-vector axial	2	$(2c \pm 1)(\pm 2c + 1)$	9
7	Piezoelectricitate, efect electrooptic liniar	Vector polar-tensor polar de ordinul doi, simetric	3	$(2c \pm 1)(4c^2 \pm 2c)$	18
8	Piezomagnetism	Vector axial-tensor polar de ordinul doi, simetric	3	$(\pm 2c + 1)(4c^2 \pm 2c)$	18
9	Polarizarea cristalelor la răsucire uniformă	Vector polar-tensor axial de ordinul doi, simetric	3	$(2c \pm 1)(\pm 4c^2 + 2c)$	18
10	Proprietăți elastice	Tensor polar de ordinul doi, simetric-tensor polar de ordinul doi, simetric ($c_{ij} = c_{ji}$)	4	$16c^4 \pm 8c^3 - 4c^2 + 1$	21
11	Proprietăți fotoelastice	Tensor polar de ordinul doi, simetric-tensor polar de ordinul doi, simetric	4	$(4c^2 \pm 2c)^2$	36
12	Electrostricțiune, efect electrooptic pătratic	Tensor polar de ordinul doi, simetric-pătratul vectorului polar	4	$(4c^2 \pm 2c)^2$	36

Scanned with OKEN Scanner

Numărul de coeficienți independenți în tensorii care descriu diferite proprietăți, pentru toate clasele de cristale

Clasa cristalografică	*Proprietatea (fenomenul) în concordanță cu tabelul 30*									
	1	2	3	4	5	6	7	8 и 9	10	11 и 12
1	3	3	6	6	9	9	18	18	21	36
$\bar{1}$	0	3	6	0	9	0	0	18	21	36
m	2	1	4	2	5	4	10	8	13	20
2	1	1	4	4	5	5	8	8	13	20
2/*m*	0	1	4	0	5	0	0	8	13	20
*mm*2	1	0	3	1	3	2	5	3	9	12
222	0	0	3	3	3	3	3	3	9	12
mmm	0	0	3	0	3	0	0	3	9	12
4	1	1	2	2	3	3	4	4	7	10
$\bar{4}$	0	1	2	2	3	2	4	4	7	10
4/*m*	0	1	2	0	3	0	0	4	7	10
4*mm*	1	0	2	0	2	1	3	1	6	7
$\bar{4}$2*m*	0	0	2	1	2	1	2	1	6	7
422	0	0	2	2	2	2	1	1	6	7
4/*mmm*	0	0	2	0	2	0	0	1	6	7
3	1	1	2	2	3	3	6	6	7	12
$\bar{3}$	0	1	2	0	3	0	0	6	7	12
3*m*	1	0	2	0	2	1	4	2	6	8
32	0	0	2	2	2	2	2	2	6	8
$\bar{3}$*m*	0	0	2	0	2	0	0	2	6	8
$\bar{6}$	0	1	2	0	3	0	2	4	5	8
6	1	1	2	2	3	3	4	4	5	8
6/*m*	0	1	2	0	3	0	0	4	5	8
$\bar{6}$*m*2	0	0	2	0	2	0	1	1	5	6
6*mm*	1	0	2	0	2	1	3	1	5	6
622	0	0	2	2	2	2	1	1	5	6
6/*mmm*	0	0	2	0	2	0	0	1	5	6
23	0	0	1	1	1	1	1	1	3	4
*m*3	0	0	1	0	1	0	0	1	3	4
$\bar{4}$3*m*	0	0	1	0	1	0	1	0	3	3
432	0	0	1	1	1	1	0	0	3	3
*m*3*m*	0	0	1	0	1	0	0	0	3	3

Scanned with OKEN Scanner

CAPITOLUL 4

SEGNETOELECTRICITATEA ŞI SIMETRIA

Segnetoelectricitatea reprezintă un ansamblu de fenomene legate de prezenţa, la unele cristale, a *polarizării electrice spontane*. *Segnetoelectricii sînt o subclasă a piroelectricilor*, a cristalelor cu aceeaşi direcţie a polarizării în întreg cristalul. Segnetoelectricii sînt *piroelectrici care se divid în regiuni de polarizare spontană* (*domenii*).

Segnetoelectricitatea este unul dintre capitolele cele mai complexe şi mai interesante ale fizicii corpului solid, la ora actuală. Cea mai importantă problemă a acestei teme este *natura* polarizării spontane. Dintre toate modurile posibile de a se ajunge la rezolvarea ei, în ultimii ani se acordă o atenţie deosebită celui mai general mod de rezolvare şi anume din punct de vedere al simetriei. Această cale a dat deja rezultate utile în studiul structurii atomice şi de domenii, al tranziţiilor de fază şi al proprietăţilor fizice ale segnetoelectricilor. Pe reprezentări simetrice se bazează, în ultimă instanţă, larga dezvoltare pe care a căpătat-o în ultimul timp punerea problemei polarizării spontane, ca şi a problemelor de dinamica reţelei. Reprezentările simetrice stau la baza cercetărilor spectrale ale segnetoelectricilor.

4.1. TRANZIŢII DE FAZĂ ÎN SEGNETOELECTRICI

La temperaturi diferite, segnetoelectricii prezintă, de regulă, diferite modificaţii cristalografice, diferite faze. Cu rare excepţii, simetria fazelor de înaltă temperatură este mai înaltă decît simetria celor de temperaturi joase. Mai mult, aproape totdeauna, încă înainte de a se topi sau descompune, cristalul devine

Scanned with OKEN Scanner

nepolar sau polar-neutru, adică *paralelectric*. Faza polară spontan polarizată se numește fază *segnetoelectrică*. Trecerea cristalului din starea paraelectrică în cea segnetoelectrică se numește *tranziție de fază segnetoelectrică*, O asemenea tranziție este, în general, totdeauna legată de modificarea simetriei cristalului.

Înainte de a analiza tranzițiile de fază segnetoelectrice, să ne oprim asupra cîtorva caracteristici, legate de posibila apariție a polarizării spontane în cristale după direcții polare privilegiate și polare simple (vezi § 1.3). Cu această ocazie trebuie să avem în vedere că, dacă o anumită direcție este polară în sens geometric, aceasta încă nu înseamnă neapărat că dipolii electrici sînt orientați în lungul ei. De aici rezultă că, în principiu, este posibil cazul în care *polarizarea spontană P_s apare într-un cristal polar după o direcție polară privilegiată*. În acest caz, divizarea în domenii nu se poate produce (conform definiției înseși a direcției polare privilegiate) și cristalul devine *piroelectric*. Apariția polarizării spontane nu conduce aici la modificarea simetriei cristalului ; în asemenea cazuri, se pare că poate avea loc variația polarizării spontane cu temperatura (în caz particular — tinderea spre zero a polarizării spontane) fără tranziție de fază. În legătură cu aceasta este interesant că la piroelectrici nu se observă experimental tranziții de fază.

Ne putem imagina, de asemenea, o tranziție compusă din variația în salturi a *valorii absolute* a lui P_s într-un cristal polar, atunci cînd se conservă direcția de polarizare. În acest caz, nici simetria cristalului nu se modifică. Posibilitatea unei variații în salturi a lui P_s este, după cît se pare, mică și fenomenul însuși ar putea fi considerat drept o tranziție de fază segnetoelectrică.

În cristalele polar neutre (vezi § 3.1) apariția polarizării spontane după direcțiile polare (sau variația ei) nu conduce la modificarea simetriei cristalului și la tranziție de fază. Cazul variației în salturi a orientării lui P_s într-un cristal polar corespunde tranziției dintr-o fază segnetoelectrică în alta și va fi analizat mai departe.

Astfel, rămîn de studiat cele mai interesante cazuri de apariție a polarizării electrice spontane în cristalele nepolare și polar neutre după direcții nepolare. Această apariție a polarizării este propriu-zis legată de tranzițiile de fază segnetoelectrice și se petrece cu modificarea simetriei. Determinarea modificării simetriei se face cel mai simplu cu ajutorul principiului sime-

Scanned with OKEN Scanner

triei Curie. După o tranziție de fază simetria cristalului va fi subgrupul comun de ordinul cel mai înalt al grupului de simetrie al cristalului și al polarizării spontane, găsit pentru fiecare direcție de polarizare dată. Întrucît polarizarea spontană are simetrie de vector polar ∞mm (în cadrul simetriei obișnuite), grupul de simetrie al cristalului după tranziție va fi totdeauna un subgrup al grupului ∞mm, adică unul dintre cele zece grupuri piroelectrice ($6mm$, $4mm$, $3m$, m, $mm2$, 6, 4, 3, 2, 1). Aceasta este simetria pe care o va avea un domeniu separat al cristalului. Totuși, importantă este modificarea simetriei cristalului, noul său grup de simetrie; divizarea cristalului în domenii și consecințele acesteia vor fi discutate mai departe.

La cristalele nepolare și polar neutre fiecare direcție are cel puțin o direcție echivalentă sau, cum se spune, direcție *echivalentă cristalografic*. Toate direcțiile de acest fel aparțin aceleiași *forme simple*, adică au același ansamblu de indici Miller. Verificarea modificării simetriei se poate face orientînd vectorul P_s după toate direcțiile *diferite cristalografic*. Numărul acestora este egal cu numărul de forme simple pentru o clasă de cristale dată.

Din teoria generală a grupurilor se știe că ordinul unui subgrup al grupului final este un divizor al ordinului grupului (teorema lui Lagrange). Se mai știe că ordinul unui grup grup G este determinat de numărul N al elementelor grupului. Un grup poate fi divizat în g_i clase echivalente, ordinul grupului fiind egal cu produsul dintre numărul de clase echivalente K_i și numărul n_i al elementelor fiecăreia dintre ele (numărul operațiilor de simetrie)

$$N = K_i n_i. \tag{4.1}$$

Astfel, de exemplu, pentru un cristal aparținînd grupului de ordinul patru 222, direcția generală $[hkl]$ are simetria 1 ($n_i = 1$). Fiind subgrup g_i al grupului 222, acest subgrup are un singur element (numărul elementelor este egal cu ordinul subgrupului). Conform relației (4.1) numărul claselor echivalente K_i ale grupului va fi egal cu patru (formă simplă — tetraedru rombic). Acesta este chiar numărul de direcții cristalografice echivalente. Dacă se are în vedere în același cristal direcția care coincide cu una dintre axele 2 ($n_i = 2$), atunci asemenea direcții vor fi — conform cu (4.1) — în număr de două ($K = 2$, toate axele 2 dintr-un asemenea cristal diferă). Pentru un cristal care aparține grupului $4/mmm$ ($N = 16$), direcția vectorială în

Scanned with OKEN Scanner

lungul axei 4 are simetria $4mm$ ($n_i = 8$); în acest caz, conform cu (4.1), direcţii identice vor fi două (forma simplă de pinacoid) ş.a.m.d. Astfel, pe baza teoremei lui Lagrange, folosind relaţia (4.1), se poate scrie următoarea relaţie generală

$$K = N_p/n_s \qquad (2.2)$$

unde K este numărul direcţiilor cristalografice echivalente în modificaţia paraelectrică, N_p — ordinul grupului de simetrie al modificaţiei paraelectrice, iar n_s — ordinul grupului de simetrie al cristalului după tranziţia de fază în modificaţia segnetoelectrică.

Rezultatele studiului asupra modificărilor simetriei cristalelor la tranziţiile de fază segnetoelectrice sînt rezumate în tabelul 32 şi în Anexa III *. Pentru cristalele polar neutre s-au avut în vedere numai modificările simetriei la apariţia polarizării

Tabelul 32

Modificarea simetriei la apariţia polarizării electrice spontane în cristalele cubice

Simetria în faza paraelectrică	Modificarea simetriei la orientare diferită a polarizării spontane						
	[100]	[111]	[110]	[*hk*0]	[*hkk*]	[*hhl*]	[*hkl*]
$m3m$	$4mm$(6)	$3m$(8)	$mm2$(12)	m(24)	m(24)	m(24)	1(38)
432	4(6)	3(8)	2(12)	1(24)	1(24)	1(24)	—
$\bar{4}3m$	$mm2$(6)	—	m(12)	1(24)	—	—	—
$m3$	$mm2$(6)	3(8)	m(12)	m(12)	1(24)	1(24)	1(24)
23	2(6)	—	1(12)	1(12)	—	—	—

după direcţii nepolare. În tabele, după simbolurile grupului care apare în urma tranziţiei este scris, în paranteze rotunde, numărul direcţiilor echivalente din punct de vedere cristalografic cu cele considerate, adică cele care au indicii cristalografici de acelaşi tip (de exemplu, în cristalele aparţinînd grupului de simetrie $m3m$ există şase direcţii cristalografic echivalente, de tipul [100] şi anume: [100], [001], [010], [$\bar{1}$00], [0$\bar{1}$0], [00$\bar{1}$]). Aceste direcţii corespund muchiilor cubului. Ordinul grupurilor de simetrie $4mm$ ale acestei direcţii este egal cu 8 ($n_s = 8$), iar

---

* Jeludev, I. S., Şuvalov, L. A., *Tranziţiile de fază segnetoelectrice şi simetria cristalelor*, Kristalografia, **1**, 681, 1956; Jeludev, I. S., Şuvalov, L. A., *Orientarea domeniilor şi macrosimetria proprietăţilor monocristalelor segnetoelectrice*, Izd. A.N. S.S.S.R., Seria fizică, **21**, 264, 1957.

Scanned with OKEN Scanner

numărul direcţiilor echivalente (claselor echivalente) este egal — în baza formulei (4.2) — cu şase, deoarece grupul iniţial are ordinul 48.

Tabelul 32 şi Anexa III arată cum se modifică simetria cristalului dacă are loc tranziţia de fază segnetoelectrică; totuşi, tabelele nu permit să se afirme că asemenea tranziţii au loc neapărat şi, de asemenea, nu dau informaţii asupra succesiunii tranziţiilor (dacă pentru cristal sînt permise cîteva tranziţii).

Toate tranziţiile de fază din modificaţia paraelectrică în cea segnetoelectrică * cunoscute în prezent sînt în concordanţă cu tabelele 1 şi 2. Dăm unele dintre ele: $BaTiO_3$: $m3m \rightarrow 4mm$ (120°C); $KNaC_4H_4O_6 \cdot 4H_2O$ (sarea Seignette) : $222 \rightarrow 2$ (24°C) KH_4PO_4 : $\bar{4}2m \rightarrow mm2$ (−151°C); SbSI : $mmm \rightarrow mm2$ (22°C); $(CH_2NH_2COOH)_3 \cdot H_2SO_4$ (triglicinsulfatul) : $2/m \rightarrow 2$(49°C); KNO_3 : $\bar{3}m \rightarrow 3m$ (120°C); $NaH_3(SeO_3)$: $2/m \rightarrow 1$ (−79°C).

Proprietatea tranziţiilor de fază segnetoelectrice de a produce o modificare a simetriei complet determinată este atît de fundamentală încît uneori ea stă la baza descoperirii de noi substanţe segnetoelectrice. Astfel, pe baza modificării simetriei s-a putut prevedea dinainte că $NaNO_2$ este un segnetoelectric şi abia după aceea au fost descoperite proprietăţi segnetoelectrice la acest cristal **. La 162°C, în cristalul de $NaNO_2$ se produce modificarea de simetrie $mmm \rightarrow mm2$ cu apariţia polarizării spontane, care există sub temperatura menţionată.

Unii segnetoelectrici există numai în modificaţia segnetoelectrică. Astfel, guanidin-aluminosulfatul [GAS; $C(NH_2)_3 \cdot Al(SO_4)_2 \cdot 6H_2O$] este cunoscut numai în faza polară de simetrie $3m$. Acest cristal se descompune prin încălzire (la −200°C), iar creşterea temperaturii peste această valoare îl face să treacă în faza paraelectrică. În acest domeniu simetria s-a putut stabili numai studiind figurile de corodare pe domeniile sale. S-a dovedit că GAS trebuie să aibă în modificaţia paraelectrică grupul de simetrie $\bar{3}m$. Selenatul acid de litiu $LiH_3(SeO_3)_2$ există numai în faza segnetoelectrică şi se descompune (la ~110°C) pînă la trecerea în domeniul segnetoelectric. Totuşi, la ridicarea presiunii exercitate asupra acestui cristal s-a descoperit tranziţia în domeniul paraelectric ($m \rightarrow 2/m$).

---

* Jeludev, I. S., *Bazele segnetoelectricităţii*, Atomizdat, Moscova, 1973.

** Jeludev, I. S., Sonin, A. S., *Despre problema găsirii de noi segnetoelectrici*, Izd. A.N. S.S.S.R., Seria fizică, **22**, 144, 1968; Sawda, S., Nomura, Fujii, S., Yoshioda, T., *Ferroelectricity in $NaNO_2$*, Phys. Rev. Lettres, **1**, 320, 1958.

Scanned with OKEN Scanner

Un număr destul de mare de segnetoelecriri ci au cîteva modificaţii segnetoelectrice (şi antisegnetoelectrice; vezi mai departe). Fiecare dintre aceste modificaţii are domeniul său de existenţă. De exemplu, în $BaTiO_3$ modificaţia tetragonală ($4mm$) există în intervalul de temperaturi 120—5°C. În intervalul de la +5 la —80°C în acest cristal modificaţia segnetoelectrică este rombică (grupul $mm2$), iar mai jos de —80°C este romboedrică (grupul $3m$). Astfel, în segnetoelectrici pot avea loc tranziţii dintr-o fază polară în alta polară. Cercetarea particularităţilor simetriei la asemenea tranziţii permite să se formuleze principiul conform căruia *simetria tuturor modificaţiilor segnetoelectrice este determinată nu de simetria modificaţiilor înconjurătoare ci de simetria modificaţiei paraelectrice*. De exemplu, pentru $BaTiO_3$, în concordanţă cu principiul simetriei Curie, dacă polarizarea spontană este orientată după axa 2 a cristalului, faza polară va avea simetria $mm2$ (de la +5 la —80°C), iar dacă P_s este orientată după axa 3 — simetria $3m$ (sub —80°C).

Folosind principiul care stabileşte că toate fazele polare sînt determinate ca simetrie de faza paraelectrică, cunoscînd simetria fazei polare considerate, se pot indica alte faze polare (segnetoelectrice) care pot apare în acest cristal după tranziţia de fază. Pe lîngă aceasta, aflarea simetriei după o tranziţie de fază *cu modificarea orientării* lui P_s nu este chiar atît de simplă ca în cazul *apariţiei* polarizării spontane. Într-adevăr, existenţa în sine a polarizării spontane într-un cristal poate fi considerată drept o indicaţie asupra faptului că acest cristal a suferit odată o tranziţie de fază segnetoelectrică. Aceasta înseamnă că problema găsirii noii simetrii a unui cristal polar, atunci cînd se schimbă orientarea lui P_s, poate fi redusă mai întîi la problema aflării grupului de simetrie pînă la prima tranziţie de fază şi apoi la problema considerată mai sus, şi anume găsirea simetriei cristalului după a doua tranziţie de fază, adică după modificarea orientării (şi valorii) lui P_s.

Cu alte cuvinte, schimbarea orientării (şi valorii) lui P_s se poate considera ca compusă din două părţi: dispariţia polarizării în direcţia existentă şi apariţia polarizării în noua direcţie. Astfel, la început trebuie să se rezolve problema inversă aceleia pe care am analizat-o deja în acest paragraf: trebuie să se afle care a fost simetria cristalului pînă ce în el a apărut polarizarea. Tabelul 33 ilustrează rezolvarea acestei probleme, obţinută cu ajutorul tabelului 32 şi al Anexei III, considerate în ordine inversă: avînd dat grupul polar al cristalului se caută toate grupurile din care poate fi obţinut el. Rezolvarea celei de-a doua

Scanned with OKEN Scanner

probleme este analogă cu cea menţionată înainte şi poate fi obţinută cu ajutorul tabelului 32 şi al Anexei III.

Să analizăm un exemplu concret. Să considerăm că grupul de simetrie al stării polare iniţiale a unui cristal este $4mm$. Cum poate fi modificată simetria cristalului după schimbarea orientării (şi valorii) polarizării spontane? Din tabelul 32 găsim că pînă la prima tranziţie de fază cristalul poate aparţine fie grupului $m3m$, fie grupului $4/mmm$. Din acelaşi tabel se vede că diferitele orientări ale lui P_s pot conduce la modificarea simetriei de la grupul $m3m$ la grupurile $4mm$, $3m$, $mm2$, 1. Corespun-

Tabelul 33

Grupurile de simetrie ale segnetoelectricilor în starea paraelectrică, determinate după grupurile de simetrie dintre starea polară P_s

Grupul de simetrie în starea segnetoelectrică dată	Grupurile pe care le poate avea cristalul pînă la apariţia polarizării spontane
$6mm$	$6/mmm$
$4mm$	$m3m$, $4/mmm$
$3m$	$m3m$, $\bar{3}m$, $\bar{6}m2$
$mm2$	$m3m$, $\bar{4}3m$, $m3$, $6/mmm$, $4/mmm$, $\bar{4}2m$, mmm
6	$6/m$, 622
4	432, 422
3	432, $m3$, $\bar{6}$, $\bar{3}$, 32
2	432, 622, $\bar{3}m$, 23, 422, $\bar{4}2m$, $\bar{4}$, 222
m	Oricare dintre grupurile nepolare şi polar neutre care are ca operaţii de simetrie rotaţii cu oglindire în jurul axei $1(m)$
1	Oricare dintre grupurile nepolare şi polar neutre, cu excepţia grupului $\bar{6}$

zător, pentru grupul $4/mmm$ din Anexa III obţinem : $4/mmm \rightarrow$ $\rightarrow 4mm$, $mm2$, m, 1. Soluţia finală a problemei poate fi scrisă sub forma $4mm \rightarrow 3m$, $mm2$, m, 1. Alt exemplu : din tabelul 32 se vede că unul dintre grupurile paraelectrice posibile pentru modificaţia polară $3m$ a cristalului de GAS este grupul $\bar{3}m$. Tocmai acest grup a şi fost găsit experimental.

Modificările simetriei segnetoelectricilor cu ocazia tranziţiilor de fază, date în tabelul 32 şi Anexa III, au fost obţinute pentru cazul în care ele *sînt determinate de apariţia polarizării spontane*. În limbajul teoriei grupurilor, ultima afirmaţie înseamnă că aici sînt considerate numai tranziţiile în care polarizarea spontană este *un parametru* al tranziţiei. La aseme-

Scanned with OKEN Scanner

nea tranziţii, simetria fazei segnetoelectrice este totdeauna subgrupul comun de ordinul cel mai înalt al grupurilor de simetrie ale cristalului şi polarizării spontane (vectorului polar). Subliniem că în cazul modului de abordare a problemei menţionat se consideră numai tranziţiile de fază cu apariţia polarizării spontane în cristale după direcţii *nepolare*. Aceasta înseamnă că la clasa $\bar{4}3m$ nu este considerată posibilă tranziţia cu apariţia polarizării spontane după o diagonală spaţială (această diagonală este polară; „$\bar{4}3m + \infty mm = 3m$"). Pentru alegerea direcţiilor nepolare şi aflarea simetriei modificaţiilor segnetoelectrice după indicaţiile din tabelul 32 şi tabelele Anexei III este util să se folosească tabelele care descriu simetria direcţiilor (tabelul 7 şi tabelele Anexei I).

În ultimul timp, pe lîngă segnetoelectricii obişnuiţi se acordă o mare atenţie segnetoelectricilor *improprii*. Segnetoelectricii improprii sînt acei segnetoelectrici în care polarizarea spontană P_s nu este un parametru al tranziţiei *, în cazul tranziţiilor de fază. În cazurile cînd ne limităm la analizarea tranziţiilor fără modificarea numărului de atomi din celula elementară, de pe poziţiile simetriei sînt segnetoelectrici improprii aceia în care la tranziţii de fază noul (evident, polar) grup de simetrie nu este subgrupul comun de ordinul *cel mai înalt* al grupurilor de simetrie a cristalului şi a polarizării spontane (apărută din alte cauze). Un exemplu de segnetoelectric impropriu ar putea fi cristalul ce aparţine în modificaţia paraelectrică de grupul $6/m$, la care apare activitatea optică de semne opuse după două direcţii reciproc perpendiculare din planul bazei (vezi Anexa II, grupul $6/m$, reprezentarea E_{2u}; tranziţia $6/m \rightleftarrows 2$).

Este raţional să lărgim noţiunea de „segnetoelectric impropriu". Mai întîi de toate, în această noţiune se pot include tranziţiile dintr-un grup polar în altul polar (mai întîi, pentru cazurile cînd noul grup de simetrie nu este subgrupul comun cel mai înalt al grupului de simetrie al cristalului şi grupului de simetrie al polarizării spontane). Aici pot fi incluse tranziţiile de tipul $mm2 \rightleftarrows 2$, $4 \rightleftarrows 2$ ş.a.m.d. Apoi, există raţiuni să includem în categoria segnetoelectricilor improprii şi pe aceia în care modificarea simetriei la tranziţii de fază poate fi descrisă *nu*

---

* Indenbom, V. L., *Asupra teoriei termodinamice a segnetoelectricităţii*, Izd. AN. S.S.S.R., Seria Fizică, **24**, 1180, 1960; Zheludev, I. S., *Ferroelectricity and Symmetry*, Solid State Physics, **26**, 429, 1971; Zheludev, I.S., *Aspects of Symmetry in the Problem of phase transition in improper ferroelectrics*, Pramana, **9**, 4, 385, 1977.

Scanned with OKEN Scanner

numai de polarizarea spontană. De exemplu, o tranziţie de fază, cu modificarea simetriei, de tipul $622 \rightleftarrows 6$ poate fi considerată, la fel de îndreptăţit, atît ca tranziţie datorită polarizării spontane cît şi ca tranziţie condiţionată de magnetizarea spontană (precum şi ca tranziţie datorită ambelor fenomene).

Definind în modul arătat segnetoelectricii improprii, urmează să numim *proprii* (*propriu-zişi*) acei segnetoelectrici în care modificările simetriei la tranziţii de fază pot fi descrise numai ca rezultat al superpoziţiei simetriei cristalului şi simetriei polarizării spontane. Aceasta înseamnă că la segnetoelectricii propriu-zişi nu sînt permise tranziţii în grupuri de simetrie care, deşi reprezintă un subgrup al grupului polarizării spontane ∞mm ($6mm$, $4mm$, $3m$, $mm2$, m, 6, 4, 3, 2, 1), sînt şi subgrupuri ale grupurilor ce descriu alte fenomene (apariţia magnetizării spontane, a activităţii optice, unele tipuri de deformaţii etc.).

Componenţa grupurilor menţionate arată că tranziţiile de fază vor fi segnetoelectrice propriu-zise numai în cazul în care modificaţia polară are unul din următoarele trei grupuri de simetrie: $6mm$, $4mm$ sau $3m$. Conform tabelului 33, asemenea tranziţii sînt posibile numai la cristalele care aparţin, în modificaţia paraelectrică, grupurilor $m3m$, $6/mmm$, $4/mmm$, $\bar{6}m2$ şi $\bar{3}m$. În acest caz, în concordanţă cu *simetria direcţiilor* (vezi tabelul 7 şi Anexa I) tranziţii de fază segnetoelectrice propriu-zise la aceste cristale sînt posibile în clasa $m3m$ atunci cînd polarizarea spontană apare după axele 4 sau după diagonalele spaţiale ale cristalului, iar în clasele $6/mmm$ şi $4/mmm$, $\bar{6}m2$ şi $\bar{3}m$ dacă direcţia lui P_s este perpendiculară pe planul bazei. Tranziţiile în aceste clase cu apariţia polarizării spontane după alte direcţiii deja nu vor mai fi segnetoelectrice propriu-zise.

Tranziţiile de fază segnetoelectrice propriu-zise pot fi aflate şi cu ajutorul Anexei II. Pentru asemenea tranziţii trebuie să alegem acele reprezentări ireductibile care induc o tranziţie, la care invarianţi de bază sînt numai vectorii polari (în clasa $m3m$, de exemplu, reprezentarea T_{1u} ş.a.m.d.)

Tranziţiile de fază pentru care nu numai polarizarea spontană poate fi parametru (în concordanţă cu cele spuse mai înainte) au loc atunci cînd sînt îndeplinite două condiţii: a) după tranziţie grupul de simetrie este cel mai înalt subgrup al grupului modificaţiei paraelectrice şi grupului polarizării spontane; b) noul grup de simetrie este unul dintre grupurile $mm2$, m, 6, 4, 3, 2, 1 (toate grupurile polare, în afară de $6mm$, $4mm$ şi $3m$).

Pentru găsirea altor parametri (în afară de P_s) de tranziţie la această categorie de segnetoelectrici nu sînt suficiente repre-

Scanned with OKEN Scanner

zentările simple de simetrie (analoge celor care au fost folosite la studierea segnetoelectricilor propriu-ziși). Totuși, folosind tabelele de simetrie a direcțiilor (vezi tabelul 7 și Anexa I) și tabelul invarianților de bază (vezi tabelele 25—29 și Anexa II), problema se poate rezolva destul de simplu. Așa, de exemplu, în clasa 432 direcțiile [111] au simetria 32. Pentru această clasă (32) apariția polarizării spontane după axa 3 este indusă de reprezentarea A_2, care permite și un alt parametru de tranziție — magnetizarea spontană. Astfel, tranziția $432 \rightleftarrows 3$ este o tranziție improprie în sensul că parametru al acestei tranziții poate fi atît polarizarea spontană, cît și magnetizarea spontană, ceea ce înseamnă că la descrierea unei asemenea tranziții de fază, în descompunerea potențialului termodinamic pot fi luate în calitate de parametru independent atît componentele polar-vectoriale (P_s), cît și cele axial-vectoriale (I_s).

Analiza tuturor tranzițiilor după direcții nepolare arată că polarizarea spontană este însoțită de magnetizarea spontană de asemenea în direcțiile 622 și 422 (polarizare și magnetizare după axele 6 și 4). Direcțiile cu simetria 622, 422 și 32 există la cristalele claselor 432, 622, 422 și 32. Numai la cristalele acestor clase apariția polarizării spontane nu este însoțită de nimic altceva în afară de apariția magnetizării spontane.

Continuînd analiza, se găsește că în direcțiile cu simetria $\bar{3}$, $\bar{1}$, $\bar{6}$, mmm, $2/m$, $6/m$, $\bar{1}m$, $4/m$ apariția polarizării spontane decurge în paralel cu apariția activității optice. Astfel, în direcția de simetrie $\bar{3}$ apariția polarizării spontane după axa $\bar{3}$ este însoțită de apariția activității optice după aceeași axă (reprezentarea ireductibilă A_s induce o tranziție de tipul $\bar{3} \rightleftarrows 3$ ș.a.m.d.).

În direcțiile cu simetrie $\bar{4}2m$, $\bar{4}$, 222, $1m$, $1/2$, $1/mm$ apariția polarizării spontane este însoțită de o deformație spontană. În afară de aceasta în direcțiile $1/m$, $1/2$, $1/mm$, apariția polarizării P_s este însoțită și de apariția magnetizării spontane și a activității optice.

Unele cristale permit tranziții în grupuri polare, induse de reprezentări ireductibile care nu conțin invarianți de bază polar-vectoriali. Aceasta înseamnă că astfel de tranziții nu sînt nicidecum datorite polarizării spontane, dar că în urma unei tranziții de fază polarizarea spontană poate apare ca fenomen secundar. Așa este tranziția deja menționată $6m \rightleftarrows 2$. În afară de aceasta, astfel de tranziții sînt posibile în clasele $\bar{6}$, $\bar{6}m2$ și $\bar{4}3m$ [$\bar{6}(E'') \rightleftarrows 1$, $\bar{6}m2(E'') \rightleftarrows 2$, $\bar{6}m2\ (E'') \rightleftarrows m$, $\bar{4}3m\ (T_1) \rightleftarrows 3$]. În primele trei cazuri scrise în parantezele drepte tranzițiile de fază sînt legate

de apariţia magnetizării spontane şi a activităţii optice în planul bazei. Tranziţiile sînt însoţite, de asemenea, de o deformaţie spontană. Pentru al patrulea caz tranziţia este legată de apariţia magnetizării spontane şi a activităţii optice.

S-a subliniat deja că a vorbi despre tranziţii de fază în cristale polare ca rezultat al *apariţiei* polarizării spontane are sens doar atunci cînd se consideră direcţii *nepolare*. Faptul este de înţeles, întrucît totdeauna se poate spune că după direcţiile geometric polare există deja o polarizare spontană. Exemple de tranziţii după direcţii nepolare în cristale polare, pot fi: $1/2 \to 1$, $1/m \to 1$ etc. Pe lîngă aceasta, în cristalele polare tranziţiile pot fi însoţite de apariţia lui P_s după direcţii *polare*, cu tranziţie nu în *subgrupuri de cel mai înalt ordin*. Asemenea tranziţii trebuie să existe la segnetoelectricii improprii.

Analiza invarianţilor de bază ai reprezentărilor ireductibile ale cristalelor polare arată posibilitatea apariţiei următoarelor tranziţii în care drept parametru nu este polarizarea spontană *

$$6mm\ (E_2) \rightleftarrows 2; \quad 6mm\ (A_2) \rightleftarrows 6;$$
$$6mm\ (B_1,\ B_2) \rightleftarrows 3m; \quad 4mm\ (A_2) \rightleftarrows 4;$$
$$4mm\ (B_1,\ B_2) \rightleftarrows mm2; \quad 6\ (B) \rightleftarrows 3;$$
$$6\ (E_2) \rightleftarrows 2; \quad 4\ (B) \rightleftarrows 2; \quad 3m\ (A_2) \rightleftarrows 3;$$
$$mm2(A_2) \rightleftarrows 2; \quad 6mm(E_2) \rightleftarrows mm2$$

În tranziţiile date, de tipul $Nmm\ (A_2) \rightleftarrows N$, starea de polarizare electrică este determinată de apariţia la tranziţie a magnetizării spontane şi a activităţii optice după axa principală. În alte cazuri tranziţia este însoţită de fenomene şi mai complicate în planul bazei (sau într-un plan perpendicular pe o direcţie polară privilegiată). După cît se pare, în toate aceste cazuri tranziţia de fază se reduce, pentru partea electrică, la modificarea valorii polarizării spontane a cristalului (existente pînă la tranziţie), iar tranziţia însăşi se datoreşte unor parametri ca magnetizarea spontană, deformaţia spontană ş.a.

Modificările simetriei cristalelor pentru toate tranziţiile posibile legate de apariţia (dispariţia) polarizării electrice sînt date în tabelele 34—37. În aceste cazuri, tranziţiile datorite nu numai apariţiei polarizării electrice sînt încercuite cu un cerculeţ simplu ($422 \rightleftarrows 4$, $mmm \rightleftarrows mm2$ ş.a.). În afară de

* În parenteză este indicată reprezentarea ireductibilă care induce tranziţia.

aceasta, în cazurile în care direcţia considerată aparţine unui grup polar, dar polarizarea spontană apare după o direcţie nepolară, grupul de simetrie al cristalului după tranziţie este încercuit cu două cerculeţe ($422 \rightleftarrows 1$, $mm2 \rightleftarrows m$, $6 \rightleftarrows 1$ ş.a.). Aceste ultime cazuri prezintă un interes deosebit, deoarece ele corespund, în general, apariţiei a două tipuri de ordonări în cristale: piroelectrică (polară) după o direcţie polară privilegiată (de exemplu, după axa 2 la clasa $mm2$) şi segnetoelectrică (în cazul general, şi antisegnetoelectrică) după o direcţie perpendiculară. Acesta este analogul formal al feromagnetismului slab; fenomenele de acest gen în segnetoelectrici poartă, de obicei, denumirea de *segnetoelectricitate* (*feroelectricitate*) *slabă*.

Tranziţiile de fază în care polarizarea electrică spontană nu este un parametru de tranziţie, apărînd ca rezultat al altor fenomene fizice, sînt înscrise în tabele în cadre dreptunghiulare (pătratice). Asemenea tranziţii nu sînt multe — în total 16. Tranziţia $\bar{4}3m \rightleftarrows 3$ corespunde, după cît se pare, cazului în care un monocristal devine dublet („gemene") (în sensul dat acestui cuvînt la descrierea proprietăţilor mecanice), mai precis „cvadruplet". Fiecare componentă a unui asemenea cvadruplet este un piroelectric; agregatul nu are componente polarizate opus, nu se poate repolariza în cîmpul electric şi, ca atare, nu este segnetoelectric. Tranziţiile $\bar{6}m2 \rightleftarrows m$ şi $\bar{6}m2 \rightleftarrows 2$ sînt analogul plan al tranziţiei $\bar{4}3m \rightleftarrows 3$ şi, de asemenea, nu pot fi considerate ca segnetoelectrice.

Tranziţiile $6mm \rightleftarrows 2$; $6mm \rightleftarrows 6$; $6mm \rightleftarrows 3m$; $6mm \rightleftarrows mm2$; $6 \rightleftarrows 3$; $6 \rightleftarrows 2$; $3m \rightleftarrows 3$; $4mm \rightleftarrows 43$; $4mm \rightleftarrows mm2$; $4 \rightleftarrows 2$; $mm2 \rightleftarrows 2$ reprezintă tranziţii în piroelectrici liniari şi, de asemenea, nu sînt segnetoelectrice. Cu toate că în aceste cazuri polarizarea spontană nu serveşte ca parametru al tranziţiei, ea trebuie să sufere o anomalie în regiunea tranziţiei.

După cît se pare, numai două tranziţii dintre cele neproprii ($6/m \rightleftarrows 2$ şi $\bar{6} \rightleftarrows 1$) pot fi considerate segnetoelectrice. În acest caz este posibilă o structură cu domenii antiparalele; cristalul poate fi repolarizat în cîmpul electric.

Studiul tranziţiilor de fază în segnetoelectrici poate fi făcut şi cu ajutorul simetriei *complete* (vezi cap. 2). Rezultatele date mai înainte, şi care folosesc reprezentările simetriei obişnuite, vor reprezenta în acest caz o parte a unor rezultate mai generale. În cadrul simetriei complete, simetria cristalelor este descrisă de 90 grupuri (dintre ele, 32 pot fi considerate ca

Scanned with OKEN Scanner

Tabelul 34

Modificarea simetriei cristalelor cubice la tranziţii legate de apariţia polarizării electrice spontane

Simetria în faza iniţială	Modificarea simetriei la diferite orientări ale polarizării						
	[100]	[111]	[110]	[*hk*0]	[*hkk*]	[*hhl*]	[*hkl*]
$m\bar{3}m$	4*mm*	$\bar{3}m$	*mm*2	*m*	*m*	*m*	1
432	4	3	2	1	1	1	—
$\bar{4}3m$	*mm*2	3	*m*	1	—	—	—
$m\bar{3}$	*mm*2	3	*m*	*m*	1	1	1
23	2	—	1	1	—	—	—

Tabelul 35

Modificarea simetriei cristalelor tetragonale la tranziţii legate de apariţia polarizării electrice spontane

Simetria în faza iniţială	Modificarea simetriei la diferite orientări ale polarizării						
	[001]	[100]	[110]	[*hk*0]	[*h*0*l*]	[*hhl*]	[*hkl*]
4/*mmm*	4*mm*	*mm*2	*mm*2	*m*	*m*	*m*	1
4/*m*	4	*m*	*m*	*m*	1	1	1
4*mm*	4, *mm*2	*m*	*m*	1	—	—	—
422	4	2	2	1	1	1	—
$\bar{4}2m$	*mm*2	2	*m*	1	1	—	—
4	2	1	1	1	—	—	—
$\bar{4}$	2	1	1	1	—	—	—

Scanned with OKEN Scanner

Tabelul 36

Modificarea simetriei cristalelor hexagonale şi tetragonale la tranziţii legate de apariţia polarizării electrice spontane

Simetria în faza iniţială	*Modificarea simetriei la diferite orientări ale polarizării*						
	[0001]*	$]11\bar{2}0]$	$[10\bar{1}0]$	$[hk\bar{i}0]$	$[hh2\bar{h}l]$	$[h0\bar{h}l]$	$[hk\bar{i}l]$
$6/mmm$	$6mm$	(mm2)	(mm2)	(m)	(m)	(m)	(1)
622	(6)	(2)	(2)	((1))	((1))	((1))	—
$6mm$	[2,6,3m]	(m)	(m)	(1)	—	—	—
$\bar{6}m2$	$3m$	((m))	[2,m]	—	—	(2)	—
$6/m$	(6), [2]	(m)	(m)	(m)	(1)	(1)	(1)
$\bar{6}$	(3), [1]	—	—	—	—	—	—
6	[3,2]	((1))	((1))	((1))	—	—	—
$\bar{3}m$	$3m$	(m)	(2)	(1)	(1)	(m)	(1)
32	(3)	((1))	—	—	—	((1))	—
$3m$	[3]	((1))	—	—	—	—	—
$\bar{3}$	(3)	(1)	(1)	(1)	(1)	(1)	(1)

* În rîndul al treilea al acestei coloane se adaugă şi grupul $mm2$.

grupuri cristalografice în simetria obişnuită). În simetria completă sînt 31 clase polare, subordonate grupului ∞/mmm.

$$6/\underline{mmm},\quad 6mm,\quad 6,\quad 6\underline{22},\quad \bar{6}\underline{m}2,\quad 6/\underline{m},$$
$$\bar{6},\quad 4/\underline{mmm},\quad 4mm,\quad 4,\quad 4\underline{22},\quad \bar{4}\underline{2}m,\quad 4/\underline{m},$$
$$\bar{4},\quad 3m,\quad 3\underline{2},\quad 3,\quad \bar{3},\quad \bar{3}m,\quad \underline{mmm},\quad \underline{mm}2,\quad mm2,$$
$$2/\underline{m},\quad \underline{2}/m,\quad 2\underline{22},\quad 2,\quad \underline{2},\quad m,\quad \underline{m},\quad 1,\quad \bar{1}.$$

Analiza tuturor tranziţiilor, pentru cristalele tuturor grupurilor, este destul de complicată. Ne vom mărgini la tabelul 38, în care sînt date modificările de simetrie (completă) în cazul tranziţiilor de fază segnetoelectrice (datorite apariţiei polarizării

Scanned with OKEN Scanner

Tabelul 37

Modificarea simetriei cristalelor triclinice, monoclinice și rombice la tranziții de fază legate de apariția polarizării electrice spontane

Simetria în fază inițială	*Modificarea simetriei la diferite orientări ale polarizării*						
	[001]	[010]	[100]	[*hk*0]	[*h*0*l*]	[0*kl*]	[*hkl*]
mmm	(mm2)	(mm2)	(mm2)	(*m*)	(*m*)	(*m*)	(1)
222	(2)	(2)	(2)	((1))	((1))	((1))	—
mm2	[2]	((*m*))	((*m*))	((1))	—	—	—
2	—	((1))	((1))	((1))	—	—	—
m	—	((1))	—	—	—	—	—
$\bar{1}$	(1)	(1)	(1)	(1)	(1)	(1)	(1)
2/m	(2)	(*m*)	(*m*)	(*m*)	(1)	(1)	(1)

Tabelul 38

Modificarea simetriei complete la apariția polarizării spontane în cristalele cubice

Simetria fazei para-electrice	*Modificarea simetriei la diferite orientări ale polarizării spontane*					
	[100]	[111]	[110]	[*hk*0]	[*hkk*]	[*hkl*]
*m*3*m*	4*mm*(6)	3*m*(8)	*mm*2(12)	*m*(24)	*m*(24)	1(48)
$m\underline{3}\underline{m}$	$\bar{4}\underline{2}m$(6)	$3\underline{2}$(8)	$mm\underline{2}$(12)	*m*(24)	$m\underline{(24)}$	1(48)
432	4(6)	3(8)	2(12)	1(24)	1(24)	—
$4\underline{3}\underline{2}$	$2\underline{2}\underline{2}$(6)	$3\underline{2}$(4)	$\underline{2}$(12)	1(24)	—	—
$m\bar{3}$	*mm*2(6)	3(8)	*m*(12)	*m*(12)	1(24)	1(24)
$\bar{4}3m$	*mm*2(6)	—	*m*(12)	1(24)	—	—
$\bar{4}\underline{3}m$	$\bar{4}$(6)	—	$\underline{m}$(12)	1(24)	—	—
23	2(6)	—	1(12)	1(12)	—	—
$m\underline{3}\underline{m}$	$4/\underline{m}$(6)	$\bar{3}$(8)	$2/\underline{m}$(12)	$\underline{m}$(24)	$\underline{m}$(24)	—
$m\underline{3}m$	*mmm*(6)	—	$mm\underline{2}$(12)	$\underline{m}$(24)	—	—
$\underline{m}3$	$2/\underline{m}$(6)	—	$\underline{m}$(12)	$\underline{m}$(12)	—	—

Scanned with OKEN Scanner

Modificarea simetriei spațiale la apariția polarizării spontane în cristalele sistemului cubic

Grupurile inițiale		*Grupurile spațiale segnetoelectrice pentru diferite orientări ale polarizării spontane*						
punctuale	*spațiale*	[100]	[111]	[110]	[hk0]	[hkk]	[hhk]	[hkl]
m3m	*Ia3d* *Im3m* *Fd3c* *Fd3m* *Fm3c* *Fm3m* *Pn3m* *Pm3n* *Pn3n* *Pm3m*	*I4cd* *I4mm* *I4cd* *I4md* *I4cm* *I4mm* *P4nm* *P4mc* *P4nc* *P4mm*	*R3c* *R3m* *R3c* *R3m* *R3c* *R3m* *R3c* *R3m*	*Fdd* *Fmm* *Iba* *Ima* *Imm* *Abm* *Ama* *Aba* *Amm*	*Cc* *Cm* *Pc* *Cm* *Pc* *Pm* *Pc* *Pm*	*Pc* *Cm* *Cc* *Cm* *Cc* *Cm* *Cc* *Cm*	*Pc* *Cm* *Cc* *Cm* *Cc* *Cm* *Cc* *Cm*	*P1*
432	$I4_13$ *I43* $F4_13$ *F43* $P4_23$ $P4_13$ $P4_33$ *P43*	$I4_1$ *I4* $I4_1$ *I4* $I4_2$ $P4_1$ $P4_3$ *P4*	*R3*	*C2*	*P1*	*P1*	*P1*	*P1*
$\bar{4}3m$	*I43d* *I43m* *F43c* *P43m* *P43n* *P43m*	*Fdd* *Fmm* *Iba* *Imm* *Ccc* *Cmm*	*R3c* *R3m* *R3c* *R3m* *R3c* *R3m*	*Pc* *Cm* *Cc* *Cm* *Cc* *Cm*	*P1*	*Pc* *Cm* *Cc* *Cm* *Cc* *Cm*	*Pc* *Cm* *Cc* *Cm* *Cc* *Cm*	*P1*
m3	*Ia3* *Im3* *Fd3* *Fm3* *Pa3* *Pn3* *Pm3*	*Iba* *Imm* *Fdd* *Fmm* *Pca* *Pnn* *Pmm*	*R3*	*Cc* *Cm* *Pc* *Cm* *Pc* *Pc* *Pm*	*Cc* *Cm* *Pc* *Cm* *Pc* *Pc* *Pm*	*P1*	*P1*	*P1*
23	$I2_13$ *I23* *F23* $P2_13$ *P23*	C_2 $P2_1$ *P2*	*R3*	*P1*	*P1*	*P1*	*P1*	*P1*

Scanned with OKEN Scanner

spontane) la cristalele cubice (11 grupuri de simetrie completă). În principiu, tabelul 38 poate fi comentat, ca și tabelul 32 și Anexa III. Ca și în aceste tabele, aici se poate vorbi despre trei tipuri de cristale (polare, polar neutre și nepolare), despre particularitatea tranziției dintre fazele polare („intrarea" în faza paraelectrică), despre imposibilitatea apariției polarizării spontane după direcții polare, despre particularitățile tranzițiilor de fază de speța a doua ș.a.m.d.

Analiza modificărilor de simetrie în cazul tranzițiilor de fază segnetoelectrice poate fi făcută și cu ajutorul *simetriei spațiale*. Din faptul că după tranziții de fază segnetoelectrice cristalul aparține uneia dintre cele zece clase polare rezultă că după o tranziție el nu poate ține — din punct de vedere al simetriei sale spațiale — decît de cele 68 grupuri spațiale corespunzătoare celor zece clase polare (piroelectrice). Aceste 68 grupuri spațiale vor fi denumite, de asemenea, *polare*.

Cunoscînd simetria spațială a unui cristal pînă la tranziția de fază și simetria spațială a cîmpului de vectori ai polarizării spontane și folosind principiul superpoziției simetriilor, se poate obține grupul de simetrie spațială al cristalului după tranziția de fază. Cîmpul vectorilor polarizării spontane reptezintă rezultatul acțiunii translației T a rețelei asupra vectorului $\mathbf{P}_s$. Vom nota simetria spațială a cîmpului de vectori $\mathbf{P}_s$, apărută în acest caz, prin simbolurile $(\infty mm)T$. Rezultatele superpoziției grupurilor simetriei spațiale a cristalului cu grupul $(\infty mm)T$, la diferite orientări (în raport cu rețeaua) ale vectorilor $\mathbf{P}_s$, pentru direcțiile polar neutre și nepolare (în starea inițială) ale cristalelor din sistemul cubic sînt date în tabelul 39.

Discuția tabelului 39 este analogă celei din cazul tabelului 32 și Anexei III.

Datorită complexității, nu vom da aici tabelele de tranziții pentru toate grupurile spațiale *.

4.2. DOMENII ÎN SEGNETLELECTRICI

După o tranziție de fază în urma căreia apare polarizarea spontană, segnetoelectricul se divide în domenii. Cauzele acestei divizări sînt de natură energetică. Energia liberă a cristalului divizat în domenii este mai mică decît energia cristalului monodo-

* Jeludev, I. S., Sonin, A. S., *Simetria spațială și tranzițiile de fază segneloelectrice*, Kristalografia, 4, 874, 1959.

menic, deoarece în ultimul polarizarea spontană provoacă apariţia unui cîmp electric extern. Pentru formarea pereţilor (suprafeţelor de separaţie) dintre domenii se cheltuieşte o energie determinată. Divizarea segnetoelectricului în domenii se petrece pînă ce energia necesară pentru formarea pereţilor devine mai mică decît energia necesară pentru menţinerea cristalului în stare polară.

Dimensiunile liniare ale domeniilor sînt diferite. Cel mai des domeniile sînt lamele subţiri, cu grosimea de ordinul zecilor de microni şi cu celelalte dimensiuni uneori de milimetri şi chiar centimetri. Un segnetoelectric real constă din domenii în general de dimensiuni diferite şi de orientare diferită. În acest sens, la segnetoelectrici se poate vorbi despre *structura de domenii*. Pe baza reprezentărilor pur geometrice, de simetrie, pot fi studiate şi rezolvate o serie de probleme referitoare la structura de domenii a segnetoelectricilor. În cele ce urmează, structura de domenii va fi analizată numai de pe aceste poziţii.

Tranziţia de fază în segnetoelectrici la încălzirea uniformă a cristalului poate fi considerată formal drept un proces care se petrece sub influenţa unei acţiuni *scalare* (simetria scalarului este simetria sferei cu plane de simetrie). Simetria de ordin înalt a acţiunii termice (scalare) înseamnă că, la tranziţie cristalul nu trebuie, cel puţin macroscopic, să-şi modifice simetria. În aceasta constă formal una dintre cauzele divizării cristalului în domenii. Un alt argument, nu mai puţin interesant decît dovada geometrică, în favoarea divizării cristalelor în domenii este acela că atunci cînd într-un cristal oarecare apare o polarizare spontană după direcţii nepolare * există cel puţin două direcţii echivalente din punct de vedere cristalografic şi fizic. Faptul că există asemenea direcţii înseamnă că în diferitele părţi ale cristalului polarizarea spontană este orientată după fiecare dintre direcţiile respective cu aceeaşi probabilitate.

Cel mai simplu este cazul segnetoelectricilor uniaxiali, în care după una dintre direcţii în părţi opuse poate fi orientată polarizarea spontană. Cele două orientări ale polarizării spontane, fac între ele, în acest caz, un unghi de 180° şi graniţa dintre ele se numeşte perete de 180°grade. Evident, în acest caz (ca, de altfel, în general) *elementele de dedublare* a domeniilor vor fi elementele de simetrie ale cristalului pierdute la tranziţie, deoarece ele sînt în stare să readucă cristalul la simetria anterioară. Astfel, apa-

---

* Aici vom considera drept tranziţie de fază segnetoelectrică numai apariţia polarizării spontane după direcţii nepolare (vezi § 4.1).

Scanned with OKEN Scanner

riția polarizării spontane în clasa 222 după axa 2 (cazul sării Seignette) conduce la domenii cu simetria 2. Dacă se ia un asemenea cristal și se efectuează asupra lui operațiile de simetrie pierdute (cele două axe 2), atunci ansamblul obținut va avea din nou simetria 222 (fig. 76, a). Domeniile gemene vor putea fi

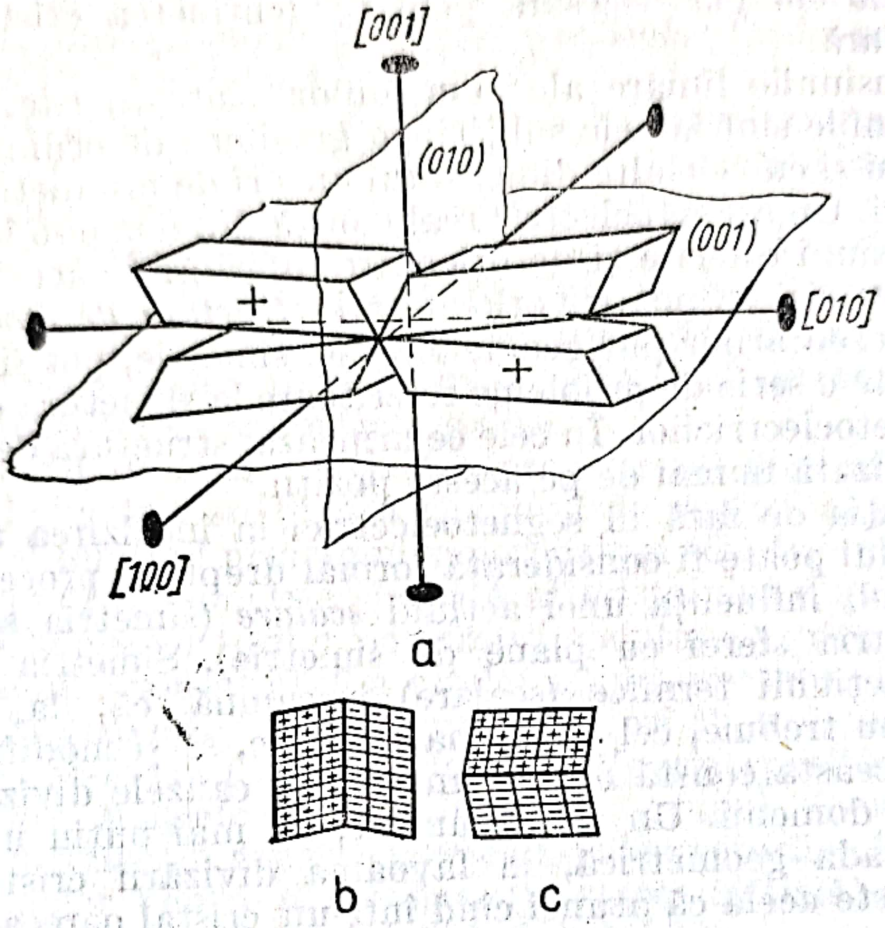


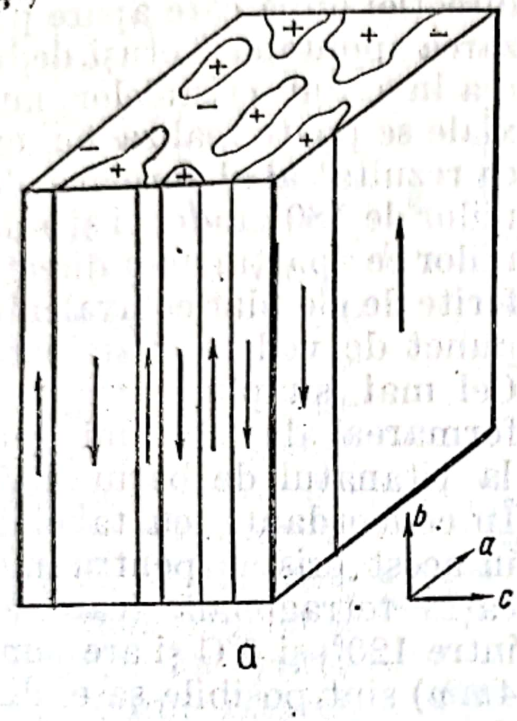
Fig. 76. Domenii într-o sare seignetoelectrică:
a — gemene domenic (simetria unui domeniu este 2, iar a gemenului 222);
b și c — orientări dipolare pe suprafața (100) cu limitele dintre domenii pe suprafețele (001) și (010) respectiv.

numite în acest caz de *rotație*. La TGS apariția polarizării spontane după axa 2 în clasa $2/m$ conduce la domenii cu simetria 2 (fig. 77). Probabilitatea statistică egală de orientare a lor în direcția acestei axe reface simetria anterioară a cristalului (din punct de vedere macroscopic)*. La KH_2PO_4 polarizarea spontană în lungul axei $\bar{4}$ îi conferă cristalului (domeniului) simetria $mm2$. Dedublarea acestor domenii ca rezultat al unei rotații în jurul axelor 2 pierdute readuce cristalul (din punct de vedere macroscopic) în grupul $\bar{4}2m$ (fig. 78, a) ș.a.m.d.

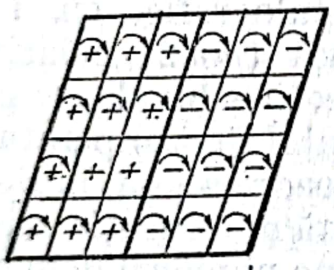
Orientarea elementelor de simetrie pierdute la tranziție dă și orientarea pereților dintre domenii. Evident, la cristalele clasei

* În acest caz dedublarea se realizează, d easemenea, datorită centrului de inversiune și domeniile gemene pot fi numite de *inversiune*.

222 pereții dintre domenii pot avea numai indicii (010) și (001) (fig. 76, b). La cristalele clasei $2/m$ pentru tranziția $2/m \rightarrow 2$ nu există limitări speciale de simetrie asupra pereților ce separă domeniile: domeniile pot avea pereți de forme destul de bizare. Totuși, destul de des acești pereți coincid cu pereții planelor



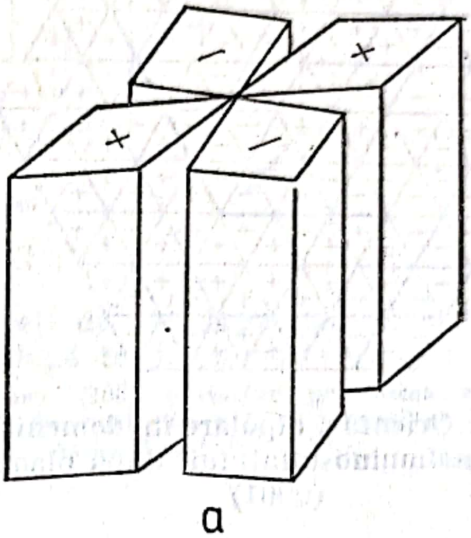
a



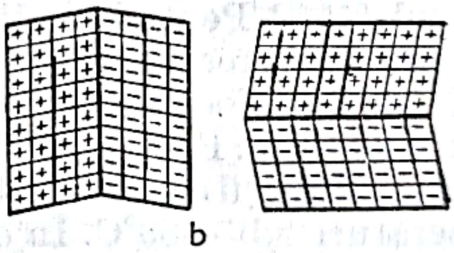
b

Fig. 77. Domenii în triglicinsulfat:

a — modelul structurii domenice; b — orientare dipolară în structura a două domenii din tăietura perpendiculară pe axa *b*, care este axă 2 și după care este orientată polarizarea spontană (compunerea săgeților semicirculare cu momentele dipolare conduce la faptul că semnele de enantiomorfism în domenii vecine sînt opuse).



a



b

Fig. 78. Domenii în dihidrofosfatul de potasiu:

a — gemene domenic (simetria unui domeniu este $mm2$, iar a gemenului $\bar{4}2m$): b — orientare dipolară în planul (001) cu pereții dintre domenii după planele (100) și (010)

cele mai dezvoltate ale cristalului. În cristalele clasei $\bar{4}2m$ la tranziția $\bar{4}2m \rightarrow mm2$ pereții dintre domenii trebuie să treacă de-a lungul planelor care conțin axa $\bar{4}$ și axele 2 ș.a.m.d.(fig.78, b). În guanidinaluminosulfat, așa cum s-a arătat mai înainte, ar trebui să aibă loc o tranziție cu modificarea simetriei de tipul $\bar{3}m \rightarrow 3m$. La o asemenea tranziție se pierd axele de sime-

trie 2, care se restabilesc, însă, o dată cu împărţirea cristalului în domenii. Pereţii dintre domenii coincid în acest caz cu planele care trec prin axa $\bar{6}$ şi axele 2 (fig. 79).

La segnetoelectricii multiaxiali caracterul pereţilor de 180 grade este determinat (ca şi la cristalele uniaxiale) de simetria direcţiei după care apare polarizarea spontană. Totuşi, dedublarea în cazul cristalelor multiaxiale se poate realiza nu numai ca rezultat al al formării domeniilor de 180 grade, ci şi a domeniilor ce aparţin unor direcţii diferite de ele (dar echivalente din punct de vedere cristalografic). Cel mai simplu exemplu este formarea de domenii gemene la titanatul de bariu $BaTiO_3$. În concordanţă cu tabelul 32, în acest cristal pentru modificaţia tetragonală (care există între 120° şi 5°C şi are simetria $4mm$) sînt posibile şase direcţii echivalente din punct de vedere cristalografic, cu indicii de tipul [100]. Pentru modificaţia rombică ($mm2$) polarizarea spontană are direcţia [110]; asemenea direcţii echivalente sînt în număr de 12. Modificaţia există în intervalul de temperaturi de la zero la —80°C. Pentru modificaţia romboedrică ($3m$) în $BaTiO_3$ există opt direcţii echivalente [111]. Această modificaţie există la temperaturi sub —80°C. În condiţii izotrope numărul domeniilor orientate după direcţii echivalente trebuie să fie egal. Reprezentarea lor formală pentru modificaţiile menţionate este dată în fig. 80. Din desen se vede că ansamblul complet al domeniilor

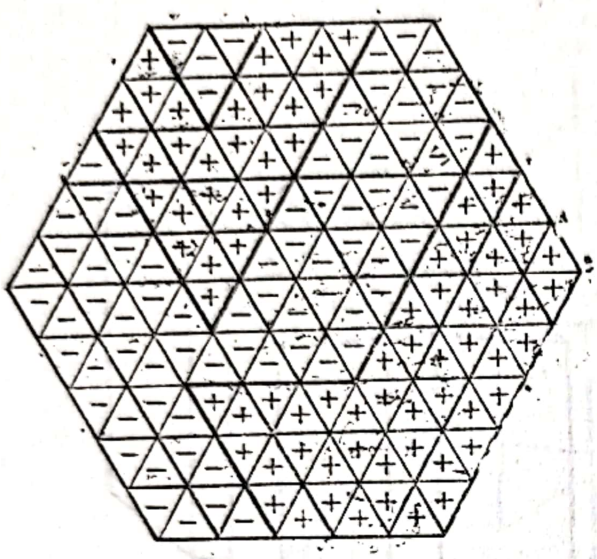


Fig. 79. Orientări dipolare în domeniile guanidinaluminosulfatului după planul (0001)

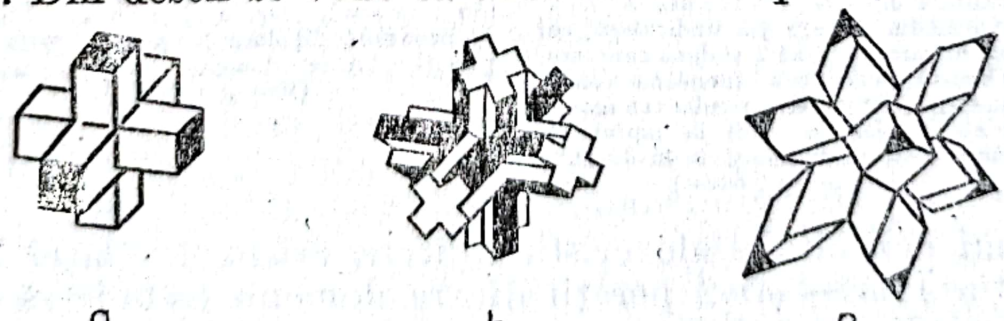


Fig. 80. Reprezentare formală a orientărilor ansamblurilor de domenii în cristalele de $BaTiO_3$ după tranziţiile în modificaţia tetragonală $m3m \rightarrow 4mm$ (a), rombică $m3m \rightarrow mm2$ (b) şi romboedrică $m3m \rightarrow 3m$ (c).

Scanned with OKEN Scanner

are şi în acest caz simetria modificaţiei paraelectrice pentru toate fazele.

În modificaţia tetragonală în $BaTiO_3$ există pereţi de 180 şi 90 grade. Aceştia pot exista şi simultan. Dedublarea poate fi considerată în primul caz drept o tranziţie $4/mmm \rightleftarrows 4mm$; ea se petrece ca urmare a pierderii axelor 2 odată cu tranziţia. Pereţii dintre domenii pot avea în acest caz indici de tipul (100) şi (110) (fig. 81). În $BaTiO_3$ drept pereţi servesc planele (100). Domeniile antiparalele care aparţin de diferite direcţii (de axele 4) de asemenea se vor dedubla ca rezultat al pierderii cu ocazia tranziţiei a unor elemente de simetrie. În particular, în cazul $BaTiO_3$ (sau al unor cristale identice cu el din punct de vedere al simetriei) peretele de 90 grade se formează pe seama axelor 2 (indici de tipul [110]) şi pereţii dintre blocurile de domenii antiparalele sînt orientaţi după planele (110). O pereche de axe se dovedeşte răspunzătoare de dedublarea antiparalelă (axele cu indicii [100]), iar cealaltă de dedublarea componentelor care aparţin axelor 4 diferite (axe cu indicii [110]) (fig. 82).

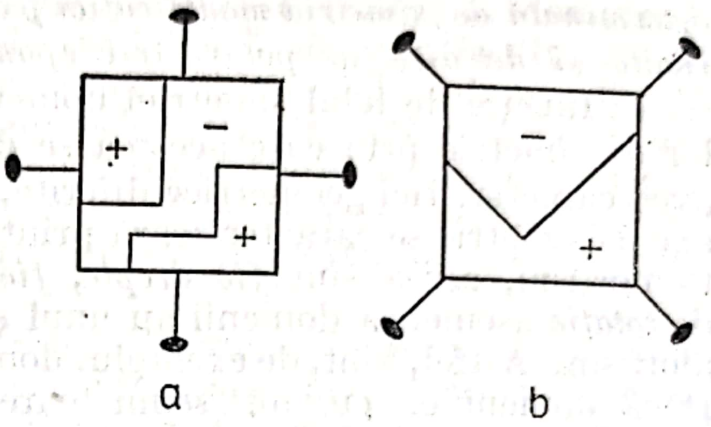


Fig. 81. Pereţi de 180° între domeniile din cristale după tranziţia $m3m \rightarrow 4mm$:

a — după planele (100) (dedublare pe seama axelor 2, cu indicii [100]; b — după planele (110) (dedublare pe seama axelor 2 cu indicii [110]).

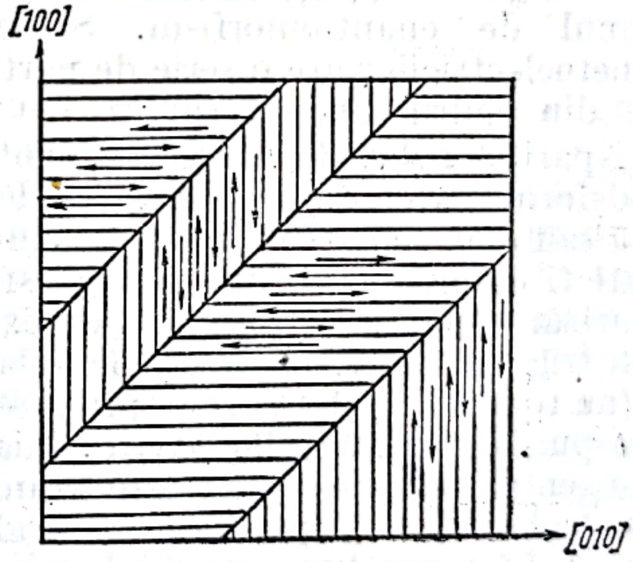


Fig. 82. Perete de 90° în titanatul de bariu în cazul existenţei unor domenii antiparalele.

În modificaţia rombică a $BaTiO_3$ (şi alte cristale identice cu el din punct de vedere al simetriei şi al tranziţiilor) unghiurile dintre domenii pot fi de 60, 90, 120 şi 180°, iar în cea romboedrică de ~70, ~109, şi 180°.

Caracterul dedublării și al orientării domeniilor în aceste cazuri se supune acelorași legități. Pentru toate cristalele, unghiurile dintre domenii sînt egale cu unghiurile dintre direcțiile echivalente, pereții dintre domenii sînt determinați de elementele de dedublare, iar *structura de domenii* în întregime *este determinată de simetria modificației paraelectrice de temperatură înaltă și de direcția polarizării spontane.*

În funcție de felul simetriei domeniilor și de tipul operațiilor de simetrie prin care acestea se dedublează, domeniile pot avea caracteristici geometrice diferite. Domeniile care au numai axe de simetrie se caracterizează printr-un anmit semn de enantiomorfism, adică sînt *fie drepte, fie stîngi.* Față de dubleții *de rotație* asemenea domenii au unul și același semn de enantiomorfism. Astfel, sînt, de exemplu, domeniile în sarea Seignette. Dacă domeniile, cu un semn oarecare de enantiomorfism, se dedublează cu ajutorul unei inversiuni sau al unei reflectări față de un plan, atunci domeniile de orientare opusă au semne de enantiomorfism opuse. Astfel, în triglicinsulfat (vezi fig. 77, b) jumătate dintre domenii sînt drepte, iar cealaltă jumătate sînt stîngi. Prin repolarizare asemenea domenii își schimbă semnul de enantiomorfism. Structura de domenii reală a segnetoelectricilor are o serie de particularități a căror descriere iese din cadrul acestei cărți*.

Apariția polarizării electrice spontane în cristale se petrece cu deformația cristalului. Această deformație poate fi *piezoelectrică* sau *electrostrictivă*. La cristalele centrosimetrice deformația poate fi numai electrostrictivă și este proporțională cu pătratul polarizării spontane. Așa este, de exemplu, tranziția în $BaTiO_3$ și în triglicinsulfat. La cristalele polar neutre pentru unele direcții (nu toate) de polarizare se produce efect piezoelectric, ceea ce corespunde deformațiilor legate liniar de polarizarea spontană. Ca exemplu în acest sens este tranziția în sarea Seignette, la care polarizarea după axa X conduce la tranziția cistalului rombic în monoclinic, unghiul celulei monoclinice fiind legat liniar de polarizarea P_s.

O serie de proprietăți macroscopice ale segnetoelectricilor în starea divizată în domenii sînt determinate de simetria modi-

---

* Zheludev, I. S., *Dipole patterns in the structures of some ferroelectrics and antiferroelectrics*, Proc. Ind. Acad. Sci., **57**, 361, 1963; Jona, F., Shirane, D., *Cristale segnetoelectrice* (traducere din limba engleză), Mir. Moscova, 1965; Jeludev, I. S., *Bazele segnetoelectricității*, Atomizdat, Moscova, 1973.

ficaţiei paraelectrice. Aceasta se leagă din nou de revenirea cristalului divizat în domenii la simetria modificaţiei paraelectrice. Astfel, segnetoelectricii necentrosimetrici în modificaţia paralelectrică (de exemplu, sarea Seignette, KH_2PO_4 şi altele) au proprietăţi piezoelectrice şi în starea divizată în domenii. Segnetoelectricii centrosimetrici, însă, rămîn centrosimetrici din punct de vedere macroscopic şi după divizarea în domenii şi şi nu prezintă efect piezoelectric* (dacă, desigur, la divizare nu s-a produs orientarea uniformă a domeniilor după direcţii echivalente). Asemenea segnetoelectrici se pot, totuşi, *polariza* — adică domeniile lor pot fi orientate în cîmp electric după ce ele vor prezenta deja efect piezoelectric. Aşa se prelucrează, de exemplu, titanatul de bariu ceramic pentru a i se imprima proprietăţi piezoelectrice.

Revenirea cristalului, după divizarea în domenii, la simetria paraelectrică iniţială îi conferă acestuia şi alte proprietăţi macroscopice ale modificaţiei paraelectrice (elastice, parţial electrice şi altele).

4.3. ANTISEGNETOELECTRICII

Celulele elementare, neutre din punct de vedere electric, ale modificaţiei paralectrice a segnetoelectricilor capătă polarizare spontană la o tranziţie de fază. Celulele elementare ale ambelor faze sînt identice cu o precizie pînă la o abatere nu prea mare. În limitele unui domeniu de dimensiuni macroscopice toate celulele elementare au una şi aceeaşi direcţie a polarizării spontane. Doar ansamblul tuturor domeniilor face ca cristalul să fi electric neutru din punct de vedere macroscopic.

La *antisegnetoelectrici* este caracteristică, de asemenea, apariţia polarizării spontane în celulele elementare iniţiale (paraelectrice) la tranziţia de fază. Totuşi, în acest caz, spre deosebire de segnetoelectrici, neutralitatea electrică se atinge chiar în limitele unui domeniu, datorită orientării antiparalele a celulelor elementare vecine. Astfel, formal antisegnetoelectricii pot fi caracterizaţi drept o subclasă a segnetoelectricilor, cu

---

* Trebuie avut în vedere faptul că fiecare domeniu în parte dintr-un segnetoelectric — avînd simetria de pirocristal —, precum şi cristalul monodomenic prezintă elefect piezoelectric.

Scanned with OKEN Scanner

„domenii" antipolare de dimensiunea unei* celule elementare. Maclarea (dedublarea) la nivelul microstructurii în antisegnetoelectrici face ca celulele elementare ale modificațiilor paraelectrică și antisegnetoelectrică să fie diferite ; la tranziții de fază apare o suprastructură, iar celula elementară a modificației antisegnetoelectrice este constituită din ansamblul celulelor elementare inițiale (paraelectrice). Evident, celula suprastructurală elementară este nepolară**.

Considerarea antisegnetelectricilor ca segnetoelectrici cu domenii de dimensiunile celulei elementare simplifică studiul multor probleme referitoare la tranzițiile de fază, la structura de domenii și la proprietăți. Tranzițiile de fază în antisegnetoelectrici trebuie considerate drept rezultat al apariției antipolarizării*** spontane în cristalul paraelectric, după una dintre direcțiile nepolare****.

În aproximația macroscopică antipolarizarea poate fi reprezentată de doi vectori polari, situați pe o aceeași dreaptă și de sensuri opuse. Un asemenea ansamblu are simetria cilindrului și este descris de grupul ∞/mmm. Pentru a afla modificarea simetriei unui cristal la tranziția de fază antisegnetoelectrică trebuie să considerăm superpoziția elementelor de simetrie ale direcției menționate mai sus și ale cilindrului. Întrucît cilindrul are simetria cea mai înaltă a oricărei *direcții* din cristal, după apariția antipolarizării ordinul simetriei direcției considerate nu scade, cu alte cuvinte simetria nu se modifică și cristalul în întregime capătă simetria direcției. Nu este greu de văzut că în antisegnetoelectrici uniaxiali, adică în cazul cînd cristalul nu are direcții antipolare echivalente cu direcția considerată,

---

* În unele cazuri compensarea antiparalelă a polarizării și realizează pe seama perechilor gemene (maclelor) sau a unui număr ceva mai mare de celule elementare.

** Aceasta nu se referă la cazul unor asemenea segnetoelectrici improprii, în care polaritatea celulei suprastructurale este condiționată de antipolarizare.

*** Antipolarizarea se numește starea în care celulele elementare vecine ale modificației paraelectrice sînt polarizate antiparalel.

**** Jeludev, I. S., Luibimov. V. N., *Particularitățile modificărilor structurale la tranziții de fază în antisegneloelectrici*, Kristalografia, **8**, 329, 1963; Șuvalov, L. A., Sonin, A.S., *Referitor la problema cristalografiei antisegnetoelectricilor*, Kristalografia, **6**, 323, 1961; Sironin, Iu. I., *Studiul tranziției de fază antisegnetoelectrice în dihidrofosfatul de amoniu, din punct de vedere al teoriei grupurilor*, Kristalografia, **12**, 208, 1969.

Scanned with OKEN Scanner

simetria în starea antisegnetoelectrică coincide cu simetria cristalului. Ne putem convinge uşor de aceasta considerînd tranziţiile cu apariţia antipolarizării după axa principală, în cristalele sistemelor mijlocii : $622 \rightarrow 622$, $\bar{6}m2 \rightarrow \bar{6}m2$, $4/mmm \rightarrow 4/mm$. Aceste cristale pot fi, însă, şi antisegnetoelectrici uniaxiali. Aşa, de exemplu, apariţia antipolarizării după axele 2 modifică astfel simetria acestor cristale : $622 \rightarrow 222$, $\bar{6}m2 \rightarrow 222$, $4/mmm \rightarrow mmm$ ş.a.m.d. Numai rezultanta antipolarizărilor după direcţiile echivalente din punct de vedere macroscopic întoarece cristalul la simetria anterioară.

Se pot întocmi uşor tabele cu modificările simetriei la tranziţii de fază antisegnetoelectrice, similare cu tabelul 32 şi Anexa III. În tabelul 40 se dă, ca exemplificare, modificarea simetriei cristalelor cubice la apariţia în ele a antipolarizării după direcţii nepolare.

De asemenea, pot fi întocmite tabele de modificări ale simetriei spaţiale (similare cu tabelul 39). În tabelul 40, după sim-

Tabelul 40

Modificarea simetriei la apariţia antipolarizării în cristalele cubice, după direcţii nepolare

Simetria în faza paraelectrică	*Modificarea simetriei la diferite orientări ale antipolarizării*						
	[100]	[111]	[110]	[*hk*0]	[*hkk*]	[*hhl*]	[*kkl*]
$m3m$	$4/mmm$ (3)	$\bar{3}m$ (4)	mmm (6)	$2/m$ (12)	$2/m$ (12)	$2/m$ (12)	$\bar{1}$ (24)
432	422 (3)	32 (4)	222 (6)	2 (12)	2 (12)	2 (12)	—
$\bar{4}3m$	$\bar{4}2m$ (3)	—	$mm2$ (6)	2 (12)	—	—	—
$m3$	mmm (3)	$\bar{3}$ (4)	$2/m$ (6)	$2/m$ (6)	$\bar{1}$ (12)	$\bar{1}$ (12)	$\bar{1}$ (12)
23	222 (3)	—	2 (6)	2 (6)	—	—	—

bolul noului grup se dă numărul direcţiilor echivalente din punct de vedere cristalografic, determinate cu ajutorul formulei (4.2). Trebuie să observăm că numărul direcţiilor de antipolarizare echivalente este de două ori mai mic decît numărul direcţiilor de polarizare echivalente (vezi tabelele 32 şi 40), deoarece ordinul grupului de simetrie al unei direcţii antipolare este de două ori mai mare decît ordinul grupului polar.

Prezintă interes faptul că direcţiile de antipolarizare pot avea simetria cristalului polar. În tabelul 40 sînt date grupurile

Scanned with OKEN Scanner

polare *mm*2 și 2. Trebuie, totuși, să avem în vedere că în aceste cazuri direcțiile de antipolarizare sînt perpendiculare pe direcția polară privilegiată din cristal. După această ultimă direcție, în particular, poate fi orientată polarizarea spontană (segnetoelectrică). Cristalele care permit ambele tipuri de ordonare — polară și antipolară — se numesc *segnetoelectrici*.

În general, apare posibilă prevederea caracterului suprastructurii pe baza reprezentărilor de simetrie. Cel mai simplu este de făcut aceasta pentru antisegnetoelectrici uniaxiali. Astfel, de exemplu, aspectul dipolar al celulelor inițiale polarizate antiparalel redat în fig. 83, a reprezintă o suprastructură ideală pentru cristalele clasei 4/*mmm* după apariția antipolarizării în direcția axei 4. În acest caz, celula elementară suprastructurală conține patru celule inițiale paralectrice; din punct de vedere macroscopic, cristalul care are o asemenea structură prezintă toate elementele de simetrie ale clasei 4/*mmm*. Interesant că la o asemenea ordonare ideală a lanțurilor antipolarizate, în cristal nu trebuie să apară macrodomenii — polarizarea este compensată în întregime încă la nivelul microscopic.

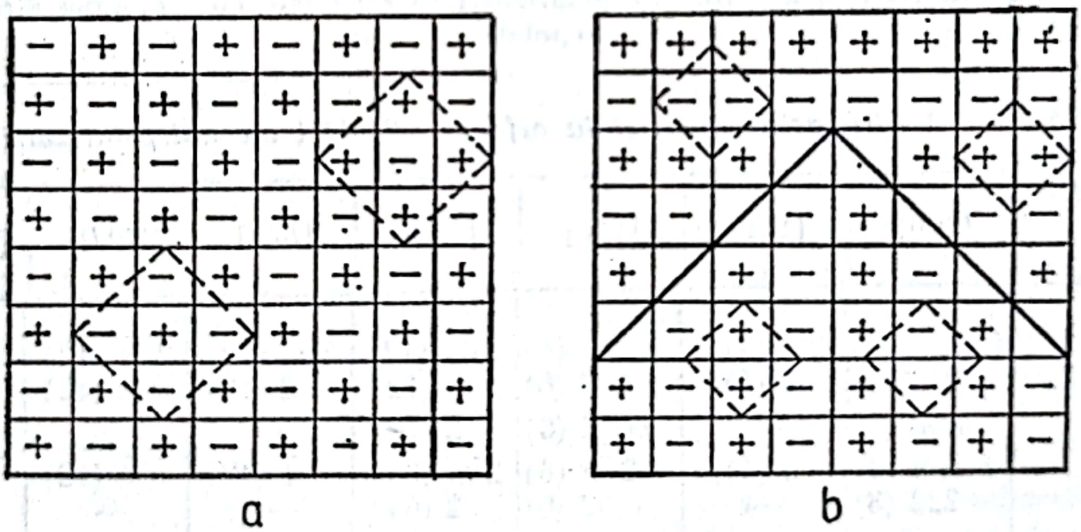


Fig. 83. Suprastructură în planul (001) a unui antisegnetoelectric cu simetria 4/*mmm*, în stare paraelectrică și prezentînd antipolarizare după axa 4:

a — ordonare ideală după două direcții reciproc perpendiculare în planul (001); b — orientarea cea mai probabilă numai într-o direcție pentru porțiuni separate din cristalul împărțit în felul acesta în domenii.

Totuși, divizarea reprezentată în fig. 83, a este puțin probabilă. Se poate presupune că, într-adevăr, structura este mai simplă și că diferitele porțiuni ale cristalului din planele perpendiculare pe axa 4 sînt ordonate doar într-o direcție (fig. 83, b). O asemenea structură va reprezenta un ansamblu de

Scanned with OKEN Scanner

domenii, fiecare domeniu constînd dintr-o grupare de straturi orientate antiparalel şi avînd orientare diferită. Celulele elementare suprastructurale în structura ideală şi în cea discutată aici sînt diferite. În cazul structurii ideale simetria punctuală a structurii este $4/mmm$, iar în cazul celei de-a doua structuri — mmm. Este important să subliniem, totuşi, că ansamblul domeniilor din fig. 83, b, din punct de vedere statistic dă, de asemenea, simetria modificaţiei paralelectrice iniţiale pentru macrocristal.

Exemplul analizat, al antisegnetoelectricului uniaxial, ne permite să ne facem o idee asupra complexităţii structurii antisegnetoelectricilor în comparaţie cu cea a segnetoelectricilor. Această complexitate conduce adeseori la greutăţi în determinarea structurii antisegnetoelectricilor, la apariţia unor rezultate vădit contradictorii. Foarte des asemenea contradicţii sînt, totuşi, doar aparente, datorită multitudinii aspectelor posibile ale diferitelor substructuri (adică a părţilor suprastructurii) din antisegnetoelectrici. Varietatea aspectelor substructurilor şi insuficienţa datelor asupra structurii atomice şi domenice a antisegnetoelectricilor au fost una dintre cauzele pentru care, practic, pînă în ultimul timp nu s-au stabilit cu certitudine regularităţile generale ale structurii şi constituţiei domenice a antisegnetoelectricilor.

În legătură cu aceasta este util să dăm unele reprezentări concrete despre structura şi domeniile unor antisegnetoelectrici şi să analizăm caracteristicile generale şi legităţile comportării acestora. Se ştie că divizarea în domenii a segnetoelectricilor este condiţionată nu numai de echivalenţa direcţiilor polarizării spontane, ci şi de tendinţa cristalului de a compensa cîmpul depolarizant al polarizării spontane — sarcinile de polarizare. Întrucît în antisegnetoelectrici compensarea sarcinilor se atinge la nivel microscopic, iar polarizarea spontană (macroscopică) lipseşte, cea de-a doua cauză a divizării în domenii cade şi domeniile din antisegnetoelectrici sînt în multe privinţe similare cu *dubleţii* mecanici.

Formarea domeniilor în antisegnetoelectrici este posibilă şi atunci cînd formaţiunile antiparalele, orientate fiind după una şi aceeaşi direcţie de antipolarizare, conform reprezentărilor de simetrie pot fi rotite una faţă de alta. Ca exemplu poate servi periodatul de argint $Ag_2H_3IO_6$. Cea mai probabilă simetrie a acestui cristal este $\bar{3}m$. Celulele elementare din el se

Scanned with OKEN Scanner

dedublează, în direcţia axei a, după tranziţia de fază la 20°C. Figura 84 dă o imagine asupra caracteristicilor simetriei şi structurii $Ag_2H_3IO_6$. În acest cristal, după apariţia antipolarizării motivul dipolar într-un plan perpendicular pe axa $\bar{6}$ trebuie să arate ca cel reprezentat în fig. 84, a. Totuşi, cel mai

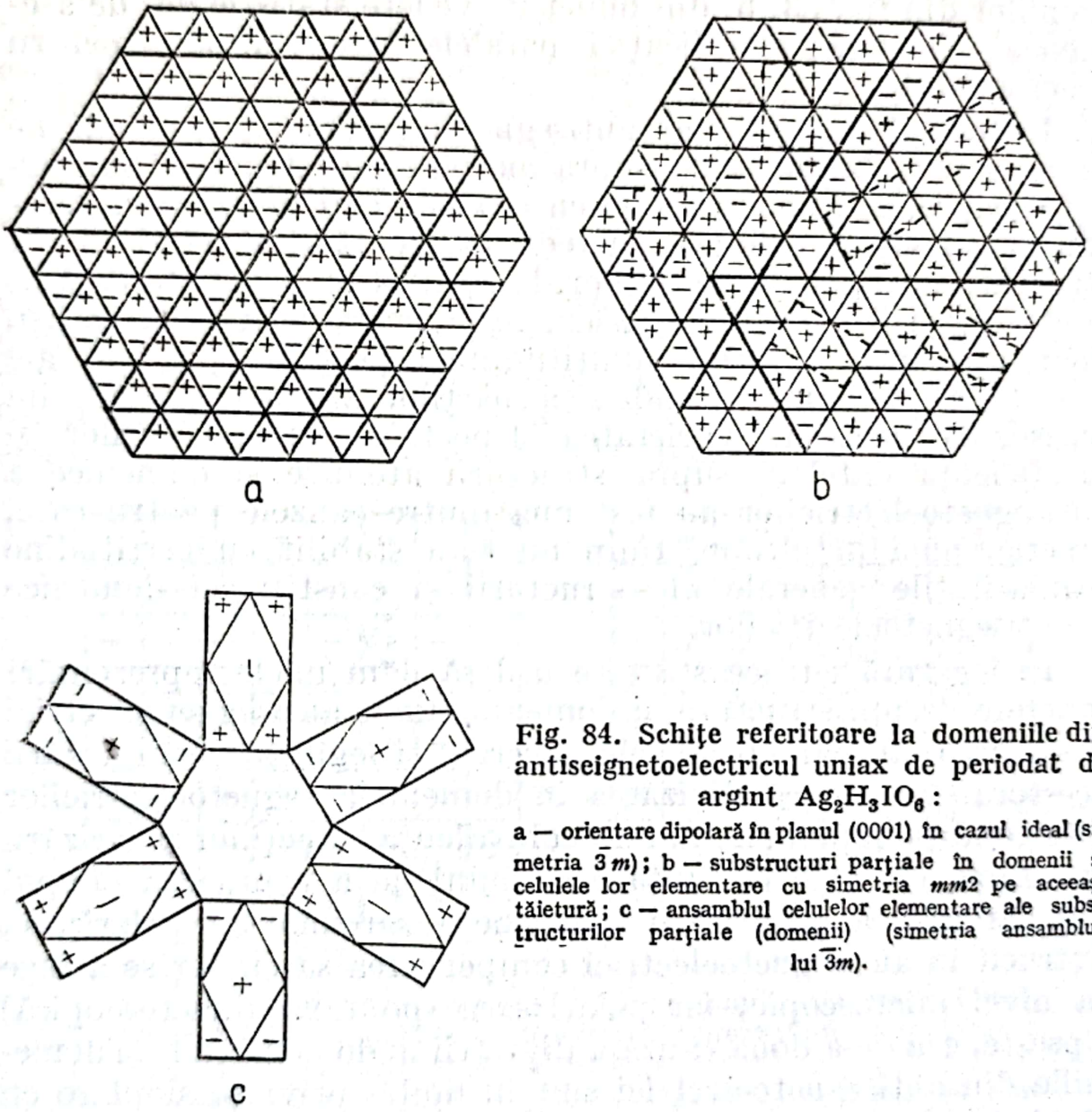


Fig. 84. Schiţe referitoare la domeniile din antiseignetoelectricul uniax de periodat de argint $Ag_2H_3IO_6$:

a — orientare dipolară în planul (0001) în cazul ideal (simetria $\bar{3}m$); b — substructuri parţiale în domenii şi celulele lor elementare cu simetria $mm2$ pe aceeaşi tăietură; c — ansamblul celulelor elementare ale substructurilor parţiale (domenii) (simetria ansamblului $\bar{3}m$).

des după aceste tăieturi ale cristalului apar domenii răspunzătoare de substructurile parţiale (fig. 84, b). Celula elementară posibilă a unei substructuri parţiale constă din două celule paraelectrice. Totalitatea domeniilor conduce şi în acest caz la simetria modificaţiei paraelectrice iniţiale, ceea ce se vede pe fig. 84, c.

Scanned with OKEN Scanner

Cu toate că posibilitatea existenței domeniilor în antisegnetoelectricii uniaxiali pare evidentă, domeniile nu au fost observate experimental și existența lor a nu a fost dovedită.

Referitor la antisegnetoelectricii *multiaxiali* nu există îndoieli asupra faptului că ei se divid în domenii*. La aceștia domeniile reprezintă regiuni din cristal care aparțin de direcții de antipolarizare diferite (dar echivalente din punct de vedere cristalografic). În interiorul fiecărui domeniu celulele elementare inițiale au o orientare antiparalelă a polarizării spontane. Simetria domeniului coincide cu simetria inițială a direcției nepolare de antipolarizare.

Ansamblul tuturor domeniilor formează o structură care are, macroscopic, simetria modificației paraelectrice inițiale. Elementele de maclare sînt și aici elementele de simetrie pierdute la tranziție.

O bună ilustrare a celor spuse este structura dihidrofosfatului de amoniu $NH_4H_2PO_4$. Acest cristal suferă o tranziție de fază la temperatura de —125°C. Direcțiile de antipolarizare vor fi axele 2. Suprastructura ideală a celulei modificației antisegnetoelectrice este reprezentată în fig. 85, a. Această celulă trebuie să aibă simetria cristalului inițial (grupul $\bar{4}2m$), de unde rezultă că celulele care formează între ele un unghi de 90° au semne de enantiomorfism diferite : una dintre ele este dreaptă, cealaltă — stîngă. Numai în acest caz se păstrează cele două plane de simetrie care trec prin axa $\bar{4}$. Că aceste celule trebuie să aibă semne de enantiomorfism diferite decurge din faptul că direcțiile [100] și [010] în cristalul inițial sînt echivalente doar prin oglindire, nu și prin suprapunere**.

În structura reală care corespunde fiecăruia dintre domeniile antisegnetoelectrice, există un singur tip de orientare a vectorului $\mathbf{P}_s$ (vezi fig. 85, b). Celula suprastructurală parțială, care reprezintă una dintre cele două orientări de antipolarizare posibile, constă din patru celule vechi (patru subcelule) și are (conform cercetărilor asupra structurilor) simetria 222 (fig. 85, c).

Grupul spațial de simetrie este $P2_12_12_1$. Fiecare domeniu constă din celule de un singur semn de enantiomorfism ; diferitele domenii au semne de enantiomorfism opuse. Ansamblul domeniilor de ambele orientări formează o structură cu simetria $\bar{4}2m$.

---

* La antisegnetoelectrici domeniile au fost descoperite și studiate, între altele în zirconatul de plumb $PbZrO_3$ și în trioxidul de wolfram WO_3.

** Noi cercetări asupra proprietăților fizice ale $NH_4H_2PO_4$ dau temeiul să se reanalizeze caracterul antipolarizării în structura acestui cristal, la care sub temperatura de tranziție se dezvăluie efecte polare.

Scanned with OKEN Scanner

La antisegnetoelectricii $Ag_2H_3IO_6$ și $NH_4H_2PO_4$, structura atomică este studiată destul de bine. Aceasta a și permis să se vorbească despre structura lor domenică, structură care — în sine — este insuficient studiată. Proprietățile antisegnetoelectrice ale unor asemenea cristale au fost studiate pentru prima oară pe antisegnetoelectricul cubic foarte important — zirconatul de plumb, $PbZrO_3$.

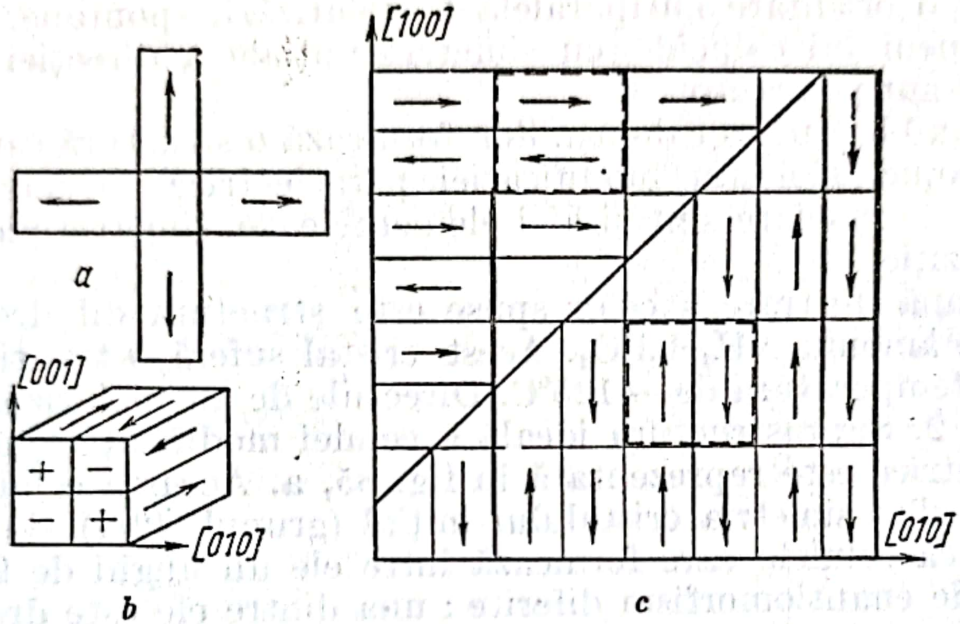


Fig. 85. Orientări dipolare în dihidrofosfatul de amoniu :
a — modelul ordonării ideale reprezentînd toate domeniile (simetria $\bar{4}2m$); b — orientări dipolare în două domenii și peretele dintre ele; c — celulă de suprastructură a unui domeniu (simetria 222).

La zirconatul de plumb structura atomică și structura domenică sînt bine studiate. La temperaturi mari (peste 230°C), zirconatul de plumb are structura cubică a perovskitului (grupul punctual de simetrie $m3m$). Sub 230° în cristal se petrece antipolarizarea după axele 2 (în total, asemenea axe sînt în număr de șase). Un domeniu al cristalului, a cărui secțiune dipolară într-un plan perpendicular pe axa 4 (axa c), este dată în figura 86, are macroscopic simetria mmm (grupul spațial $Pbam$) Caracteristica structurii constă în aceea că celulele inițiale sînt polarizate după diagonală. Consecința geometrică a acestui antiparalelism într-o direcție perpendiculară pe antipolarizare (axa b) constă în faptul că în direcțiile axelor 4 inițiale perioada structurii se dublează. Aceasta înseamnă, în particular, că sub un strat perpedicular pe axa c se află un strat cu exact aceeași orientare a dipolilor. Celula suprastructurală conține 32 subcelule inițiale : noua celulă rombică aleasă corect con-

Scanned with OKEN Scanner

ține opt unități de formulă ale $PbZrO_3$. Această celulă are parametrii $a = a_0\sqrt{2}$, $b = 2a$, $c = 2a_0$, unde a_0 este parametrul celulei cubice. Simetria celulei suprastructurale este descrisă de grupul *mmm* (vezi tabelul 40); ansamblul tuturor domeniilor are grupul de simetrie $m3m$*.

Experiențele arată** că structura de domenii (maclată) a cristalelor de $PbZrO_3$ în modificația rombică se aseamănă cu structura domenică a $BaTiO_3$ rombic. În aceste cristale modificația rombică este condiționată de apariția polarizării în celulele paraelectrice cubice, după direcția [110]. Diferența dintre ele constă doar în aceea că în $PbZrO_3$ rombic celula elementară este suprastructurală, pe cînd în $BaTiO_3$ ea este celula inițială a modificației cubice.

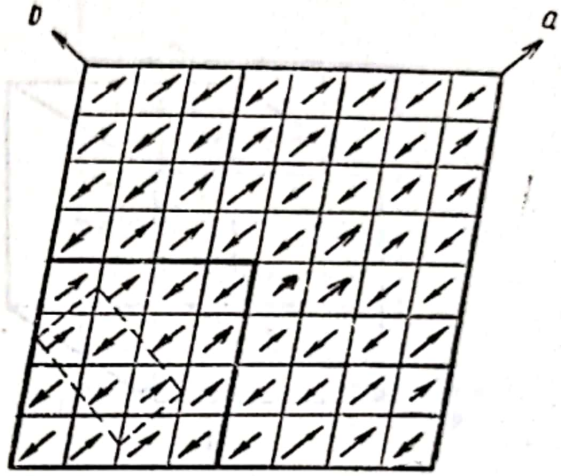


Fig. 86. Orientare dipolară în suprastructura $PbZrO_3$ rombic, în planul (001). (Cu linie îngroșată s-a indicat o celulă a suprastructurii, iar punctat — alegerea corectă a noii celule rombice).

Alegerea axelor în raport cu celula cubică în $PbZrO_3$ rombic este arătată în fig. 87, a. Conform orientării antipolarizării după direcția [110] a celulei cubice, între domeniile $PbZrO_3$ pot fi determinate geometric frontierele — după planele (100) și (110) — celulei cubice. Planele (100) separă domeniile gemene, în care direcțiile de antipolarizare fac un unghi de 90°. Un asemenea tip de frontiere cu stingerea simetrică a domeniilor s-a observat experimental și este arătat schematic în fig. 87, b. În acest caz, axele *b* sînt axe de antipolarizare a domeniilor și formează într-adevăr un unghi de 90°. Planele (110) ale celulei cubice separă, în modificația rombică, domeniile gemene cu stingerea paralelă a componentelor; direcțiile de antipolarizare ale componentelor fac între ele un unghi de 60° (120°).

---

* Uneori se consideră că $PbZrO_3$ are în starea antisegnetoelectrică simetria *mm*2. Aceasta este posibil dacă modificația paraelectică nu are structură de perovskit, ci grupul ei de simetrie este $\bar{4}3m$ (vezi tabelul 40). Grupul *mm*2 permite ordonarea segnetoelectrică în cristal (vezi mai sus). În acest caz, în domeniile cristalului este posibil piezoefectul, care s-a și observat experimental.

** Jona, F., Pepinsky, R., Shirane, G., *Optical Study of $PbZrO_3$ și $NaNbO_3$ Single Crystals*, Phys. Rev., **97**, 1584, 1955.

Scanned with OKEN Scanner

Asemenea frontiere s-au observat, de asemenea, experimental și sînt reprezentate în fig. 87, c.

Trioxidul de wolfram (WO_3), la temperatura camerei, este monoclinic și are celula elementară suprastructurală cu parametrii apropiați de $2a_0$, $2a_0$ și a_0 (unde a_0 este parametrul celulei cubice

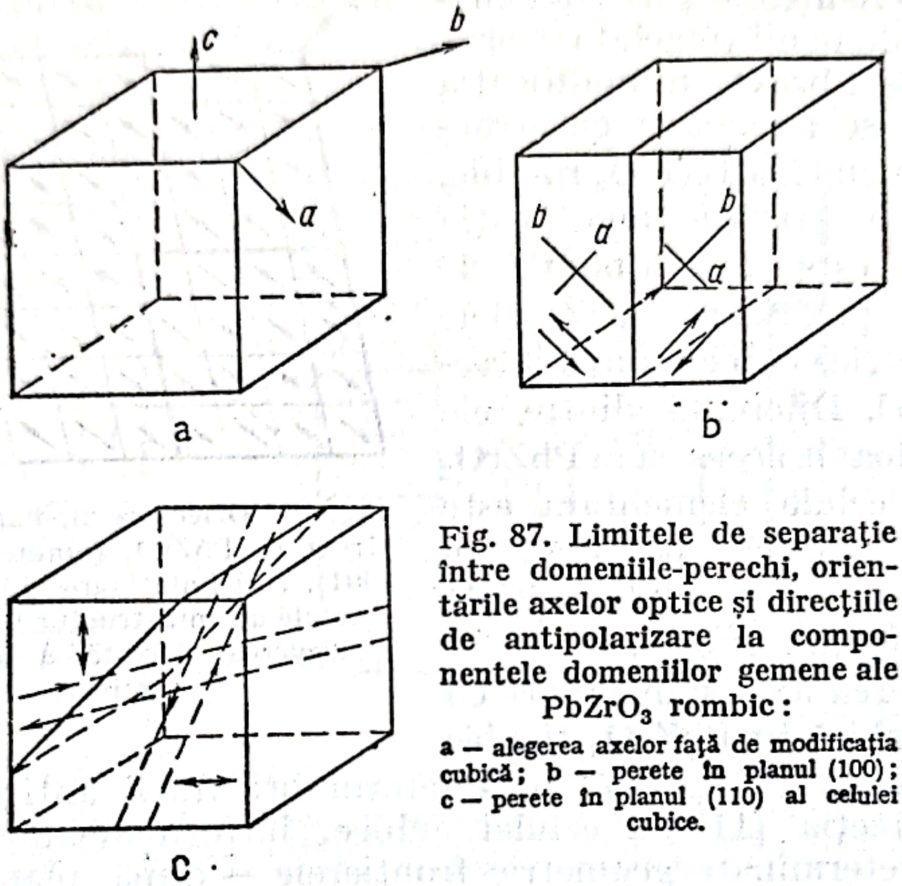


Fig. 87. Limitele de separație între domeniile-perechi, orientările axelor optice și direcțiile de antipolarizare la componentele domeniilor gemene ale $PbZrO_3$ rombic:

a — alegerea axelor față de modificația cubică; b — perete în planul (100); c — perete în planul (110) al celulei cubice.

paraelectrice). Simetria modificației antisegnetoelectrice este $2/m$. În celulă sînt patru unități de formulă. Peste 740°C trioxidul de wolfram devine tetragonal, cu parametrii celulei $a = 2a_0$, $c = a_0$. Grupul de simetrie spațială $P4/nmm$ conține două unități de formulă. Modificațiile suprastructurale ale WO_3 pot fi considerate drept rezultat al apariției succesive a polarizării în subcelula cubică, de simetrie $m3m$, la început în direcția axei [100], iar apoi în direcția [$h0l$] (direcție orientată arbitrar, situată într-un plan perpendicular pe axa b; vezi tabelul 40). Motivele dipolare ale modificației antisegnetoelectrice a WO_3 sînt date în fig. 88.

Structura de domenii la cristalele de WO_3 a fost observată încă înainte de descoperirea fenomenului de antisegnetoelectricitate. În aceste cercetări timpurii s-a constatat că structura domenică a WO_3 la temperatura camerei amintește de structura domenică a cristalelor de $BaTiO_3$. În afară de aceasta, s-a re-

Scanned with OKEN Scanner

marcat o mare mobilitate a domeniilor sub influenţa tensiunilor mecanice, care-i conferă cristalului o plasticitate aproape ideală. S-a arătat, de asemenea, că domeniile trioxidului de wolfram nu-şi modifică constituţia sub acţiunea cîmpurilor electrice.

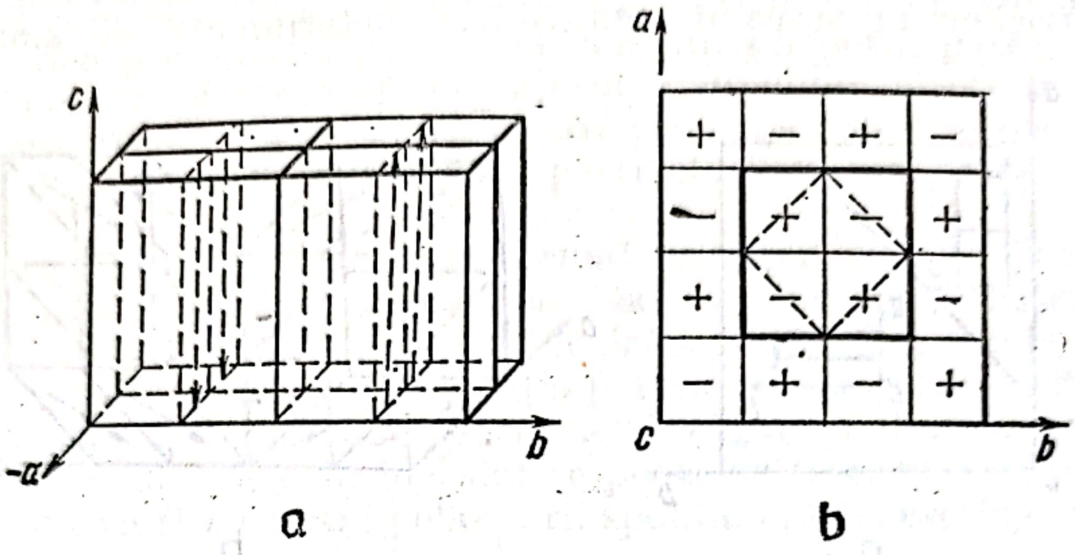


Fig. 88. Motive dipolare în celulele suprastructurale rombică (a) şi tetragonală (b) ale trioxidului de wolfram$_3$ (În cazul modificaţiei rombice celula suprastructurală coincide cu celula elementară; la cea tetragonală s-a indicat prin linii punctate alegerea celulei elementare, iar prin linii îngroşate — a celulei suprastructurale).

Mai tîrziu au fost studiate cîteva alte particularităţi ale domeniilor gemene ale trioxidului de wolfram. În particular, s-a arătat că în plăcuţele perpendiculare pe axa c a cristalului (cu a cărui direcţie aproape coincide momentul dipolar al subcelulei; vezi fig. 88, a) se observă frontiere domenice care coincid cu planele (110) ale celulei cubice. Existenţa acestor frontiere poate fi înţeleasă dacă se consideră că într-unul dintre domeniile vecine polarizarea P_s are indicii $(h0l)$ şi $(h0\bar{l})$, iar în celălalt — indicii $(0kl)$ şi $(0k\bar{l})$, în sistemul de coordonate ale celulei cubice (fig. 89, a). Fiecare domeniu are, la rîndul său, frontierele paralele şi perpendiculare pe muchiile a şi b ale cristalului. Existenţa frontierelor după planele (100) ale celulei cubice devine evidentă dacă se ţine seama de apariţia la fel de îndreptăţită a polarizării într-un domeniu atît după direcţiile $(h0l)$ şi $(h0\bar{l})$, cît şi după direcţiile $(\bar{h}0l)$ şi $(\bar{h}0\bar{l})$ (fig. 89, b). Grosimea domeniilor este de la 0,0004 mm pînă la 0,01 mm, ceea ce coresunde aproximativ dimensiunilor domeniilor din $BaTiO_3$.

La tranziţia de fază din apropierea temperaturii de 740°C structura de domenii se modifică în concordanţă cu schimbarea structurii cristalului (vezi fig. 88, b). Peste această temperatură,

Scanned with OKEN Scanner

dacă se observă cristalul în direcţia axei c, cîmpul vizual al microscopului devine întunecat, ceea ce înseamnă că în noua modificaţie tetragonală direcţia de antipolarizare coincide cu axa c a cristalului.

Proprietăţile fizice macroscopice ale cristalelor antisegnetoelectricilor în stare domenică sînt determinate de simetria

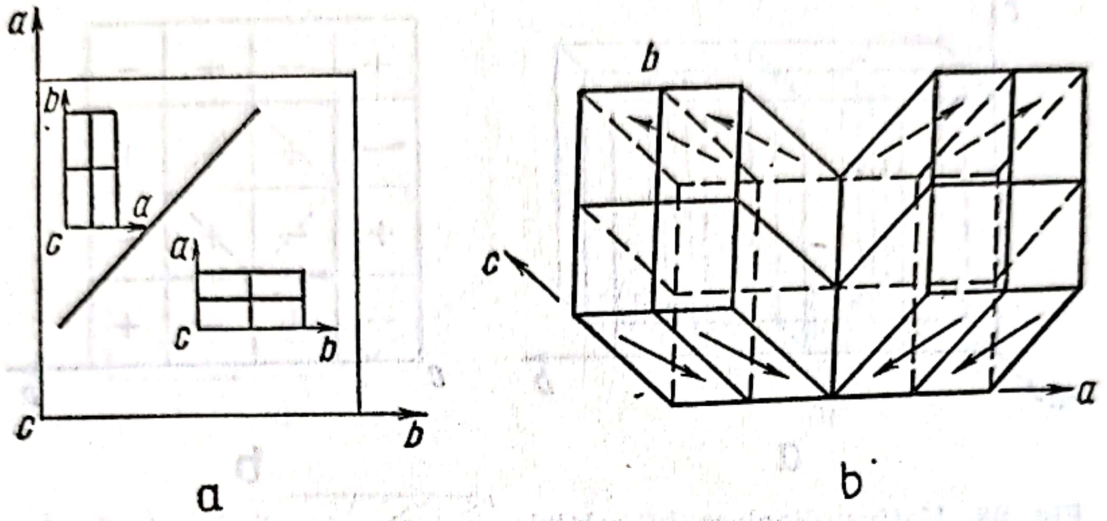


Fig. 89. Perete după planul (110) între domeniile din WO_3 monoclinic, la temperatura camerei:

a — peretele şi orientările axelor cristalografice în domeniu de ambele părţi ale peretelui
b — reprezentare schematică a pereţilor după planele (100) în interiorul unui singur domeniu.

modificaţiei paralectrice. În particular, în antisegnetoelectrici este posibil efectul piezoelectric atît pentru cristal în întregime, cît şi pentru domeniile sale în parte. Aceasta este de înţeles, deoarece din antiparalelismul polarizării în celulele vecine nu rezultă deloc (după cum se afirmă uneori) că antisegnetoelectricii trebuie că fie centrosimetrici. O serie de alte proprietăţi macroscopice (în afară de efectul piezoelectric) ale antisegnetoelectricilor divizaţi în domenii se determină, de asemenea, după simetria modificaţiei paraelectrice.

4.4. NATURA SEGNETOELECTRICITĂŢII STUDIATĂ PE BAZA ANALOGIILOR DE SIMETRIE CU FEROMAGNETISMUL

a) POSIBILITATEA FORMALĂ A APARIŢIEI POLARIZĂRII SPONTANE CA REZULTAT AL ORDONĂRII MOMENTELOR MAGNETICE DE SPIN ALE ELECTRONILOR ŞI PROTONILOR

Cînd se abordează problema magnetizării spontane, de obicei se caută elemente din structura substanţei care au momente

Scanned with OKEN Scanner

magnetice elementare. În cazul feromagnetismului, de pe aceste poziţii magnetizarea spontană este rezultatul ordonării momentelor magnetice de spin ale electronilor. O asemenea ordonare constă în orientarea paralelă a momentelor menţionate, iar în unele combinaţii este posibil ca ea să se petreacă datorită interacţiunii spin-orbită. Cu toată analogia care există între fenomenele magnetice şi electrice, pînă în prezent nu s-a putut găsi explicaţia polarizării spontane cu ajutorul dipolilor electrici elementari. Aceştia nu există în natură ; un dipol electric poate fi creat doar cu ajutorul a două particule încărcate, de semne opuse.

Totuşi, ne putem imagina formal un dipol electric (deci şi polarizarea spontană) nu ca două sarcini electrice, de semne contrare, deplasate una faţă de cealaltă. Se înţelege de la sine că, în ultimă instanţă, la apariţia polarizării spontane centrele de greutate ale sarcinilor pozitive şi negative dintr-o celulă elementară nu vor coincide, dar se poate arăta că această necoincidenţă va fi *nu cauza* polarizării spontane, *ci consecinţa* altui proces.

Soluţia indicată aici poate fi găsită şi modelată ca rezultat al mişcării de ordonare a sarcinilor *de un singur* semn. În particular, o asemenea mişcare de ordonare poate fi condiţionată de o anumită ordonare a momentelor magnetice de spin ale electronilor. Într-adevăr, o sarcină electrică care se mişcă sub influenţa unei diferenţe de potenţial generează un cîmp magnetic, al cărui caracter se vede în fig. 46, a. Un asemenea cîmp toroidal poate avea, de asemenea, simetria sarcinii în mişcare. Evident, imaginea poate arăta şi invers : cîmpul toroidal creează o diferenţă de potenţial care provoacă mişcarea (deplasarea) sarcinilor. Într-o structură concretă cîmpul toroidal poate fi generat de un ansamblu de electroni ale căror momente magnetice de spin sînt orientate astfel încît formează un inel închis. Într-o structură de tip general este greu de găsit criteriile care ar permite ordonarea toroidală a momentelor magnetice de spin ale electronilor. Posibilitatea apariţiei unei asemenea ordonări depinde de structura învelişului electronic al atomului, precum şi de structura cristalului. În unele cazuri concrete ordonarea toroidală a momentelor magnetice de spin este destul de simplu de modelat.

În fig. 90 este dat un model pentru trei modificaţii ale structurii perovskitului. În modificaţia tetragonală axa toroidului coincide cu axa 4 a cristalului, în cea rombică — cu axa 2, iar în cea romboedrică cu axa $\bar{6}$. În particular, pentru titanatul

Scanned with OKEN Scanner

de bariu (ca şi pentru alţi segnetoelectrici cu structură octaedric-oxigenată) ordonarea toroidală a momentelor magnetice de spin ale electronilor este, după cît se pare, condiţionată în

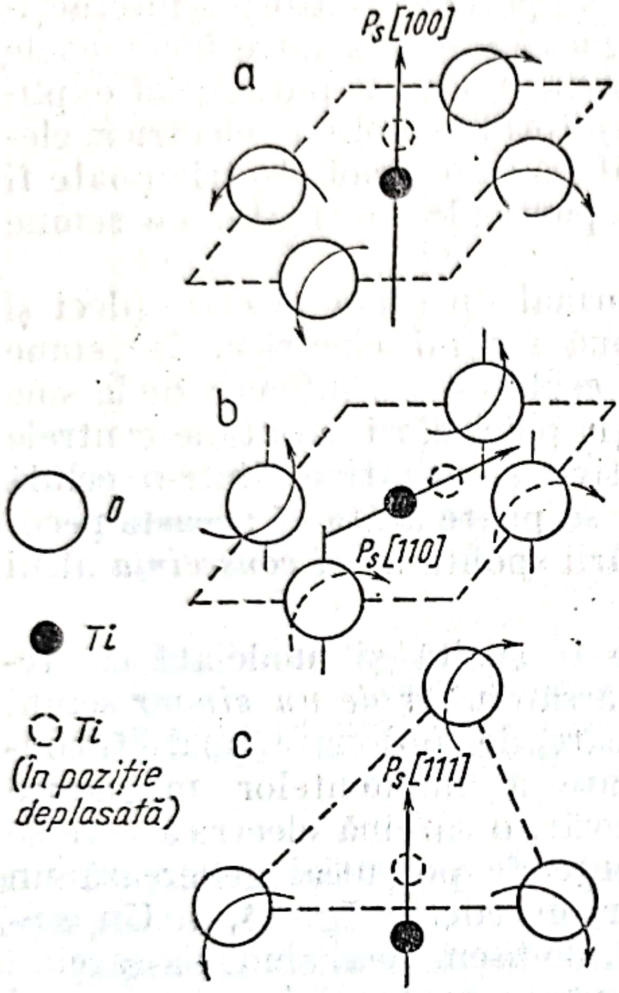


Fig. 90. Ordonare toroidală a momentelor magnetice de spin ale electronilor în structura perovskitului în modificaţia tetragonală (a), rombică (b) şi romboedrică.

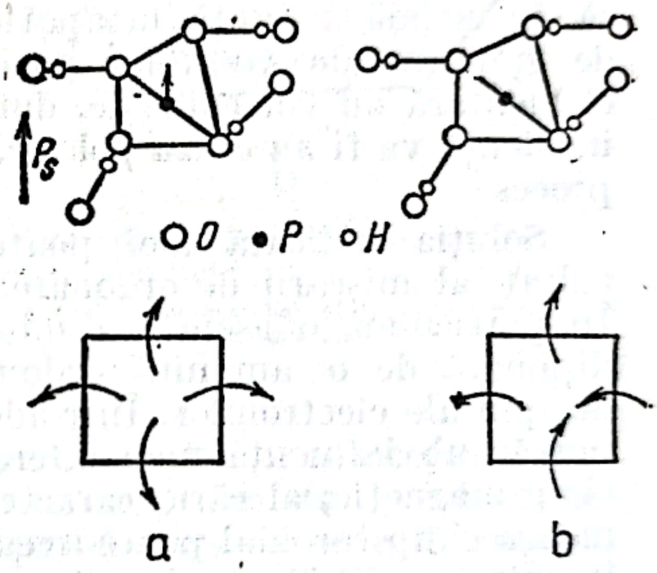


Fig. 91. Reprezentare schematică a poziţiei protonilor în legăturile de hidrogen ale KH_2PO_4:

a — ordonarea protonilor la temperatură mai joasă decît temperatura Curie (T_C) conduce la formarea unei structuri toroidale; b — lipsa ordonării legăturilor de hidrogen la temperatură mai mare decţ T_C corespunde absenţei structurii toroidale.

principal de electronii octaedrului de oxigen. Pe lîngă aceasta, ordonarea toroidală este posibilă nu numai pentru astfel de structuri.

În fig. 91 este dată schema ordonării legăturilor de hidrogen din structura KH_2PO_4. După cum se ştie, ordonarea protonilor în legăturile de hidrogen ale acestei structuri este considerată cauza apariţiei polarizării spontane. Dacă se presupune că ordonarea protonilor în legăturile hidrogenice ale KH_2PO_4

este însoțită de ordonarea momentelor magnetice de spin ale acestor particule, atunci chiar pentru cazul corespunzător apariției polarizării spontane are loc ordonarea toroidală a momentelor magnetice. În cazul cînd protonii din legăturile de hidrogen nu sînt ordonați, structura toroidală lipsește.

La descrierea apariției polarizării spontane ca rezultat al ordonării protonilor legăturilor de hidrogen (ca și la descrierea altor segnetoelectrici cu elemente de structură ordonabile) trebuie avut în vedere că planul de ordonare este perpendicular pe direcția polarizării spontane. Aceasta este o consecință elementară a faptului că cele două cîmpuri — electric și magnetic — sînt reciproc perpendiculare.

În structurile reale se poate realiza nu numai ordonarea toroidală a momentelor magnetice de spin elementare. În particular, ordonarea toroidală poate avea loc pentru momentele magnetice orbitale. Se poate imagina că ultimul caz corespunde apariției polarizării spontane la piroelectricii liniari (turmalină, sulfat de litiu, zahăr ș.a.), în timp ce la segnetoelectrici polarizarea spontană poate apărea ca rezultat al ordonării toroidale a momentelor magnetice.

b) ANALOGUL ELECTRIC AL EXPERIENȚELOR EINSTEIN-DE HAAS

Momentul mecanic al electronului (spinul electronului) și momentul magnetic al acestuia M_s sînt legate prin relația

$$M_s = \frac{e}{\mu c} S_z \qquad (33.)$$

unde S_z este componenta z a spinului, μ — masa electronului; c — viteza luminii, e — sarcina electronului. Legătura directă dintre spin și momentul magnetic* înseamnă posibilitatea detectării rotirii probei la remagnetizarea ei. Într-adevăr, în cazul remagnetizării trebuie să se conserve momentul cinetic total. Întrucît remagnetizarea înseamnă în același timp și modificarea sensului spinului, momentul cinetic total se conservă nu-

---

* În cazul general, o legătură similară cu (4.3) are loc, de asemenea, între momentele magnetic și orbital. De aceea, fenomenele descrise în continuare (efectele magneto-mecanice) sînt posibile nu numai la feromagnetici, ci și la paramagnetici.

Scanned with OKEN Scanner

mai atunci cînd proba se rotește la remagnetizare, compensîndu-se astfel modificarea orientării spinului.

Constatările menționate au servit drept bază pentru experiențele magneto-mecanice efectuate de Einstein și de Haas: o probă magnetică, suspendată cu un fir subțire și situată în cîmpul unei bobine magnetice, se răsucește atunci cînd se produce remagnetizarea. Înregistrarea răsucirii la remagnetizare se poate face relativ ușor cu condiția ca remagnetizarea să aibă loc pe frecvența proprie a sistemului torsionat „fir-probă".

Analogul electric (în caz particular, segnetoelectric) al experiențelor Einstein-de Haas poate fi un fenomen în care momentul electric **p** este considerat corespondentul impulsului mecanic $m\mathbf{v}$. Ambele mărimi (**p** și $m\mathbf{v}$) sînt vectori polari, în timp ce în magnetism spinul și momentul magnetic erau vectori axiali. *Posibilitatea* de a stabili o corespondență între fiecare mărime **p** și o mărime $m\mathbf{v}$ pe baza reprezentărilor de simetrie, evident nu înseamnă că o asemenea legătură *trebuie* să existe în mod real. Situația se complică și mai tare prin faptul că în natură nu au fost descoperite momente electrice elementare. Se pot doar indica două modele la care legătura menționată apare permisă.

În primul model se poate postula simplu că fiecărui moment electric îi corespunde un impuls „propriu" (analog cum, în cazul electronului, spinului îi corespunde un moment magnetic), fără ca în natură să se fi găsit o asemenea corelație. În cel de-al doilea model, o asemenea legătură apare evidentă dacă se presupune că momentul electric este rezultatul ordonării toroidale a spinilor (precum și a momentelor magnetice de spin; vezi § 4.4, a). În orice caz, „răsucirea" toroidului, adică rotirea lui după circumferința care trece prin miezul său (analog rotirii rotocoalelor de fum), corespunde „din punct de vedere mecanic" unui impuls mecanic, iar „din punct de vedere electric" — unui dipol electric. Modificarea „răsucirii" inelului în sens opus va corespunde variației unui impuls mecanic oarecare. Astfel, într-un sistem închis pentru ca impulsul să se conserve trebuie să se considere că modificarea „răsucirii" toroidului va corespunde „impulsului de recul".

Pentru dielectricii reali (de exemplu, la segnetoelectrici) experiențele similare cu cele magneto-mecanice trebuie să conste în observarea „impulsurilor de recul" la remagnetizarea probelor, adică la inversarea orientării dipolilor electrici în cîmp electric. Asemenea experiențe s-au făcut pe o serie de

Scanned with OKEN Scanner

segnetoelectrici *. Schema experienței este dată în fig. 92. Un disc segnetoelectric este suspendat de o tijă de oțel, reprezentînd un fel de pendul. De probă se fixează o oglindă, care permite să se înregistreze oscilațiile „pendulului", la repolarizarea segnetoelectricului, după reflexia fasciculului de lumină provenit de la sursa *6*. Fenomenul se observă deosebit de net atunci cînd frecvența de repolarizare coincide cu frecvența proprie a pendulului (ca sistem mecanic). S-a arătat că pentru segnetoelectrici oscilațiile au loc numai în intervalul de temperatură ce corespunde apariției stării de polarizare spontană (fig. 93, a). Aplicarea unui cîmp constant „încrucișat" nu dă posibilitatea să se inverseze polarizarea ; în astfel de cîmpuri oscilațiile se sting pe măsura creșterii lor (fig. 93, b).

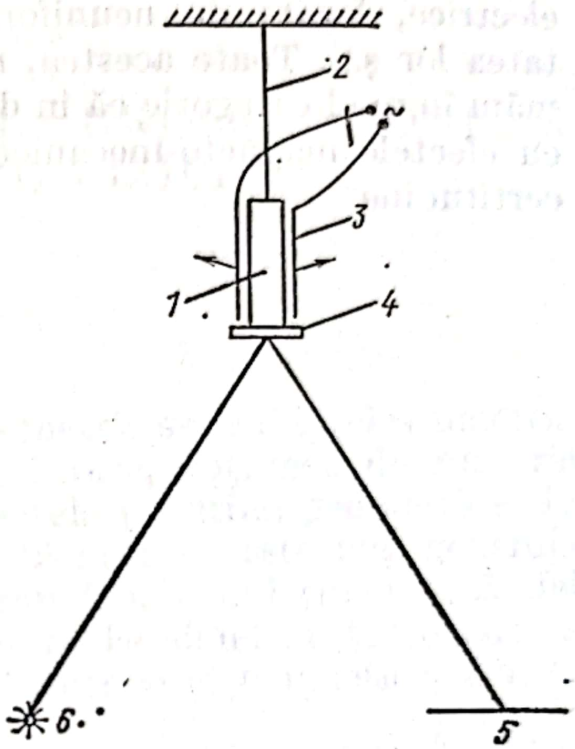


Fig. 92. Reprezentare schematică a unui dielectric:
1 — disc segnetoelectric; 2—tijă; 3—electrozi; 5 — oglindă; 5 — scală pentru înregistrarea deviației; 6 — sursă de lumină.

Cu toată simplitatea aparentă, comportarea sistemului osci-

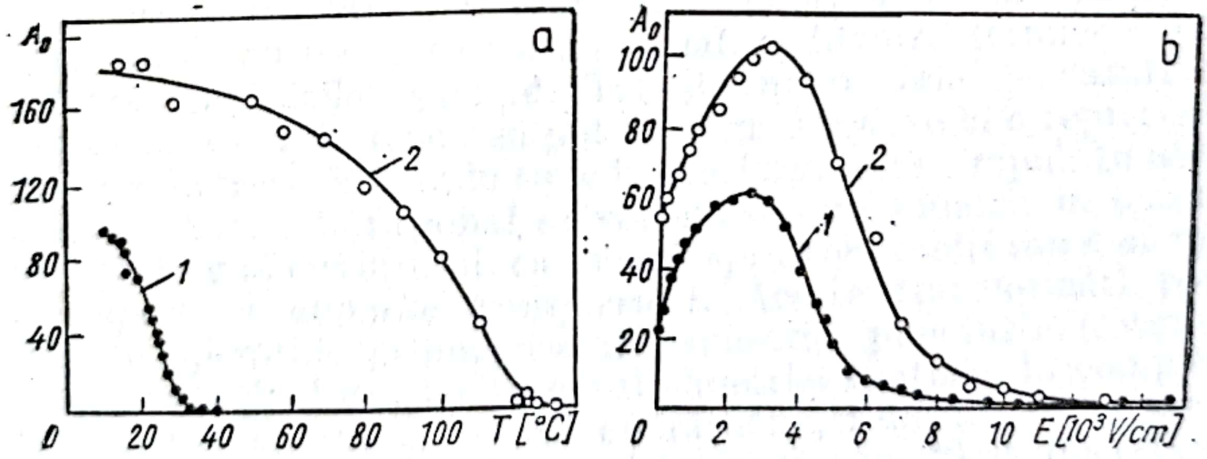
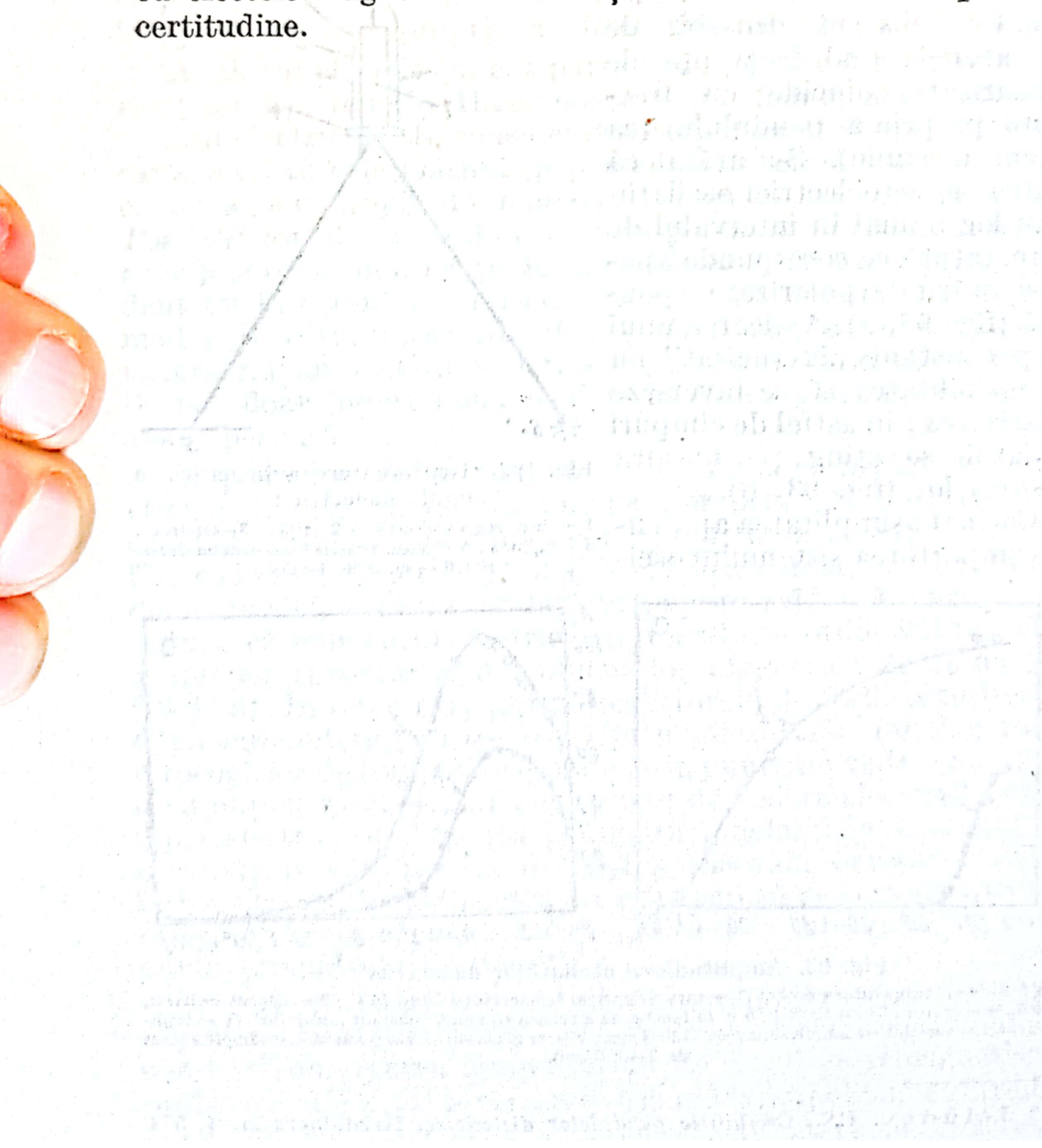


Fig. 93. Amplitudinea oscilațiilor dielectrice:
a — în funcție de temperatura probei (1 — sare Seignette, temperatura Curie 25°C; 2 — titanat de bariu, ceramică, temperatura Curie 120°C); b — în funcție de mărimea cîmpului constant „deviator" (1 — triglicinsulfat, cîmp variabil cu amplitidinea de 1720 V/cm; 2 — triglicinsulfat, cîmp variabil cu amplitudinea de 3440 V/cm).

* Jeludev, I.S., *Oscilațiile pendulelor dielectrice*, Kristalografia, 4, 571 1959.

lant de tipul reprezentat în fig. 92 este greu de încadrat într-o tratare unică. Pe lîngă fenomenele arătate (similare cu experienţele magneto-mecanice) pot exista şi altele, în particular piezoelectrice, legate de neuniformitatea probelor, de excentricitatea lor ş.a. Toate acestea, nu ne permit, din păcate, să afirmăm în mod categoric că în dielectrici au loc fenomene similare cu efectele magneto-mecanice şi că ele au fost descoperite cu certitudine.



Scanned with OKEN Scanner

CAPITOLUL 5

APLICAREA SIMETRIEI LA UNELE FENOMENE ŞI PROBLEME FIZICE*

În cele expuse pînă aici prin simetrie s-a subînţeles simetria *geometrică*. Din punct de vedere istoric, noţiunea de simetrie a apărut tocmai referitor la obiectele (figurile) geometrice. În ştiinţa contemporană, însă, această noţiune este mai generală şi adeseori depinde de obiectul sau fenomenul concret. Astfel au apărut reprezentările referitoare la simetria tensorilor, a funcţiilor de undă, a cîmpurilor electrice şi magnetice, a timpului şi altele.

De obicei, prin simetrie a cîmpurilor, a proprietăţilor şi a fenomenelor se înţelege simetria figurilor geometrice care le descriu. Ca exemplu putem lua o concluzie anterioară din prezenta lucrare, şi anume faptul că simetria cîmpului electric era identificată cu simetria vectorului polar, simetria cîmpului magnetic — cu cea a vectorului axial, a dilatării termice — cu simetria elipsoizilor ş.a.m.d. Totuşi, într-o serie de cazuri o proprietate sau un fenomen pot fi cu greu reduse la o reprezentare geometrică. Exemplu tipic în acest sens este timpul. În asemenea cazuri este raţional să vorbim despre simetrie în sensul cel mai larg al cuvîntului, ca *invarianţa unor ecuaţii sau a altora în raport cu anumite transformări*. Aceste transformări pot include operaţiile geometrice ale simetriei punctuale (rotaţii, rotaţii cu oglindire), iar în cazul simetriei spaţiale, în completarea lor — translaţii, rotaţii cu răsucire, reflectări cu alunecare. În cadrul simetriei complete (vezi cap. 2) la operaţiile simetriei punctuale se adaugă antitoraţiile şi antirotaţiile cu oglindire. Aceasta permite să se compare figuri (sau părţi ale

* În continuare, practic, toate problemele vor fi abordate de pe poziţiile simetriei *complete*, chiar dacă cuvîntul „completă" va lipsi, de cele mai multe ori.

lor) care au două perechi de calităţi — scalare şi pseudoscalare —, egale. În simetria completă figurile pot fi antiegale şi de semn opus atît în raport cu ambele perechi de semne deodată, cît şi faţă de fiecare pereche separat. Unei anumite perechi de semne îi pot corespunde, în general, sensuri fizice diferite. În particular, simetria completă poate fi folosită pentru descrierea raporturilor dintre particulele elementare şi antiparticulele lor (paritatea combinată CP): particula şi antiparticula au sarcini opuse (scalar) şi semne de enantimorfism (pseudoscalar). În continuare, se va discuta posibilitatea folosirii simetriei complete şi pentru descrierea proprietăţilor şi fenomenelor referitoare la schimbarea semnului timpului (inversiunea timpului).

5.1. UNELE APLICAŢII ALE SIMETRIEI ÎN FIZICA CLASICĂ

a) SPAŢIUL ŞI TIMPUL

Evident, esenţa principiilor fundamentale de simetrie din fizică este strîns legată de reprezentările de spaţiu şi timp. În fizica clasică aceste reprezentări sînt determinate de *principiul relativităţii al lui Galilei*. La baza acestui principiu stă noţiunea de sistem (de coordonate) de referinţă inerţial. Se numesc inerţiale acele sisteme de referinţă în care mişcarea corpurilor nesupuse acţiunii unor forţe exterioare se petrece cu viteză constantă. Toate sistemele de coordonate inerţiale sînt echivalente şi toate legile naturii sînt invariante în raport cu transformările coordonatelor şi timpului în asemenea sisteme. Astfel, dacă un sistem de coordonate se mişcă în raport cu altul cu viteza v (să spunem, în direcţia X), atunci legătura dintre coordonatele şi timpii din aceste două sisteme se determină cu relaţiile:

$$X = X' + vt;\ Y = Y';\ Z = Z';\ t = t'. \qquad (5.1)$$

De aici rezultă că în mecanica clasică, newtoniană, care se bazează pe principiul relativităţii al lui Galilei, se consideră că interacţiunea dintre particulele materiale se transmite instantaneu. Astfel, în fapt relativitatea există aici numai pentru spaţiu, iar timpul este absolut — în toate sistemele inerţiale timpul se scurge la fel.

Scanned with OKEN Scanner

Din legea conservării energiei în mecanica clasică decurge *omogenitatea* timpului *, cu alte cuvinte viteza de scurgere a timpului nu variază în timp. Pentru condiţii fizice concrete timpul curge într-o singură direcţie determinată. În cazul cel mai simplu din mecanică timpul este un coeficient de proporţionalitate între doi vectori polari — vectorul spaţiu şi vectorul viteză. O asemenea mărime trebuie să aibă simetria scalarilor $\infty/\infty/mmm$. Totuşi, trebuie să avem în vedere faptul că scalarul timp are o trăsătură specifică : valoarea sa absolută creşte cu scurgerea timpului, dar creşte la fel în toate punctele spaţiului.

În ceea ce priveşte spaţiul, în fizica clasică se ştie că el este *omogen* şi *izotrop*. Omogenitatea spaţiului decurge din legea de conservare a impulsului (mv = const.) pentru un sistem închis. Din această lege rezultă, în general, ceva mai mult decît atît — izotropia spaţiului în raport cu direcţia de mişcare (deplasare). În particular, de aici urmează că pentru o direcţie de deplasare dată, „înainte" şi „înapoi" sînt echivalente. În ultimă instanţă aceasta înseamnă că spaţiul nu se accelerează în niciuna dintre direcţii. Aceasta nu contrazice, însă, posibilitatea ca spaţiul să se comprime sau să se destindă izotrop. Aşadar, în mecanica clasică spaţiul — dacă considerăm doar omogenitatea sa — trebuie să aibă simetria scalarilor (grupul $\infty/\infty/mmm$).

Existenţa legii de conservare a momentului cinetic (momentul impulsului) $\mathbf{M} = [\mathbf{r} \cdot m\mathbf{v}]$ din mecanica clasică se tratează ca izotropie a spaţiului : la o rotaţie oarecare a unui sistem închis, ca întreg, în spaţiu proprietăţile mecanice nu se modifică. Momentul cinetic este un vector axial şi, de aceea, din legea conservării lui rezultă că spaţiul nu se roteşte după nici o direcţie. Totuşi, aceasta nu exclude posibilitatea ca spaţiul să fie torsionat (în sens pseudoscalar) la fel după toate direcţiile. O asemenea răsucire este posibilă atît în sensul dextrogir cît şi în cel levogir. Astfel, dacă ne îndreptăm atenţia asupra acelor proprietăţi ale spaţiului care sînt condiţionate doar de legea conservării momentului cinetic, simetria spaţiului trebuie să fie descrisă fie de grupul de simetrie al scalarului ($\infty/\infty/mmm$), fie de grupul pseudoscalarului ($\infty/\infty/\underline{m}\underline{m}\underline{m}$). Luarea în consideraţie a particularităţilor spaţiului, care posedă calităţi de omogenitate şi izotropie, conduce la concluzia că

---

* Omogenitatea spaţiului şi timpului, precum şi izotropia lor sînt considerate aici drept o *urmare* a legilor de conservare a energiei impulsului şi momentului impulsului, şi nu invers.

Scanned with OKEN Scanner

simetria este descrisă de unul dintre grupurile : $\infty/\infty/mmm$ sau $\infty/\infty 2$*. Cel de-al doilea grup corespunde spaţiului torsionat. Dacă în mecanica clasică se consideră spaţiul şi timpul împreună, şi nu separat, atunci ansamblul lor este de asemenea descris de unul dintre cele două grupuri ($\infty/\infty/mmm$ sau $\infty/\infty 2$), deoarece timpul are simetria scalarului.

Legile mecanicii clasice sînt invariante în raport cu schimbarea semnului timpului, cu inversiunea timpului. De exemplu, în ecuaţia de mişcare newtoniană

$$m \frac{d^2X}{dt^2} = F \tag{5.2}$$

(unde m este masa, X — spaţiul, F — forţa şi t — timpul) schimbarea semnului timpului, din cauza diferenţierii de două ori în raport cu timpul, nu conduce la modificarea ecuaţiei (5.2). Prin urmare, după cum rezultă din cele analizate mai sus, schimbarea semnului timpului nu conduce, în mecanica clasică, la nici un fel de limitare suplimentară în simetria spaţiu-timpului. Practic, aceasta înseamnă că în mecanica clasică operaţia de inversiune a timpului este formală şi nu atinge esenţa materiei şi natura ei (vezi ∞ 5.2).

b) EXEMPLE DIN MECANICĂ

Condiţia de echilibru a unei balanţe (cîntar) este condiţia ca momentele M_1 şi M_2 ale forţelor P_1 şi P_2, aplicate pe talerele acesteia, să fie egale şi orientate în sensuri opuse. Echilibrul este, în acest caz, egalitatea (pînă la semn) a doi vectori axiali. Aceşti doi vectori au ca element de simetrie un plan de simetrie (fig. 94), în care şi sînt posibile deplasările, dacă vectorii momente ale forţelor nu sînt egali în modul.

Simetria balanţei poate fi astfel determinată de planul de simetrie m. O asemenea simetrie o are, după cum se poate vedea uşor, şi pîrghia.

În cele expuse mai sus s-a remarcat deja că mişcarea liniară uniformă a unei particule de-a lungul axei X, cu viteza v

$$\mathbf{X} = \mathbf{v}t \tag{5.3}$$

---

* În general, se poate considera spaţiul absolut vid, lipsit de orice sens fizic Un asemenea spaţiu trebuie să aibă simetria cea mai înaltă : $\infty/\overline{\infty}/\underline{\infty}/\overline{\infty}$ (vezi §2.3). Lungimea unui segment de dreaptă într-un astfel de spaţiu este invariantă în raport cu toate operaţiile simetriei complete : rotaţii, rotaţii cu oglindire, antirotaţii şi rotaţii cu antioglindire (totalitatea diametrelor „*gri*" faţă de ambele semne).

Scanned with OKEN Scanner

este caracterizată de legătura dintre doi vectori polari (coordonatele și viteza). Simetria unui asemenea fenomen poate fi, deci, definită ca simetria vectorului polar ($\infty/\underline{m}mm$). Din

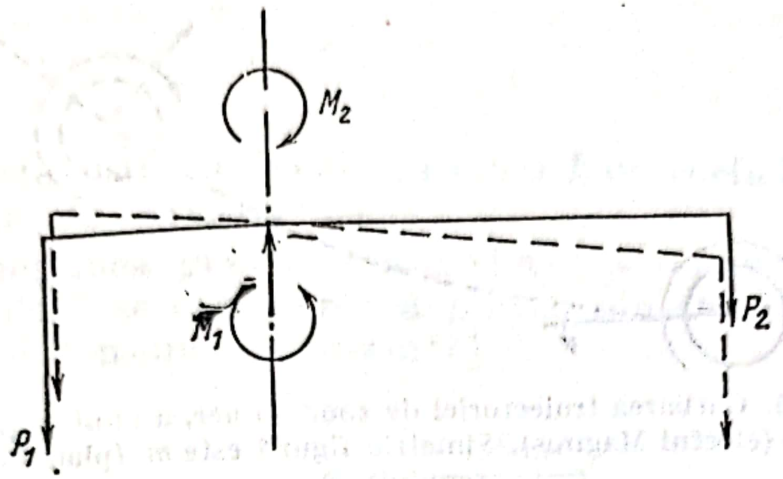


Fig. 94. Dacă momentele M_1 și M_2 nu sînt egale, balanța nu este în echilibru: sistemul se rotește într-un plan perpendicular pe momente. Simetria balanței este m (planul desenului).

(5.3) se vede că simetria timpului este simetria scalarului ($\infty/\infty/mmm$).

Să ne imaginăm că un cilindru în rotație se mișcă într-un mediu oarecare cu viteza v, astfel încît vectorul **v** este perpendicular pe axa cilindrului. Simetria imaginii rezultate este determinată de compunerea simetriilor a doi vectori: axial (momentul de rotație* al cilindrului) și polar (viteza deplasării cilindrului). Aceasta dă simetria m (plan de simetrie) în cadrul simetriei obișnuite și simetria $\underline{mm}2$ în simetria completă (vezi, de asemenea, fig. 41, e și f).

Mișcarea cilindrului în rotație este din punct de vedere formal (al simetriei) echivalentă cu efectul Hall (vezi § 3.3.) Rolul cîmpului magnetic îl joacă aici momentul de rotație, mișcarea corespunde curgerii unui curent. În efectul Hall acestui ansamblu îi corespunde apariția unei diferențe de potențial transversale: un fenomen asemănător apare și la mișcarea cilindrului în rotație (a sferei ș.a.). Efectul respectiv este cunoscut în mecanică sub denumirea de efect Magnus: traiectoria unui corp în în rotație, în aer, căruia i s-a imprimat o mișcare de translație, se curbează (fig. 95).

Din punct de vedere fizic, această curbare se datorește forței transversale care apare ca urmare a faptului că, în direcția

* Momentul cinetic.

transversală mişcării, punctele corpului au viteze diferite în raport cu mediul (cu aerul). Tocmai această „cădere a mişcării" este cauza apariţiei forţei transversale. Sensul acestei

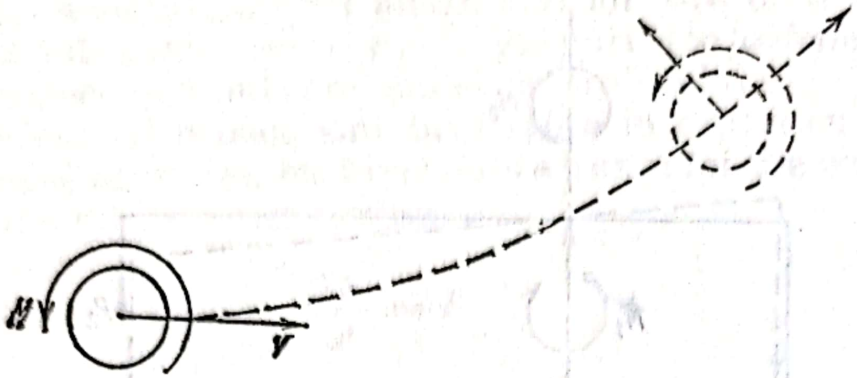


Fig. 95. Curbarea traiectoriei de zbor, în aer, a unui corp în rotaţie (efectul Magnus). Simetria figurii este m (planul desenului).

forţe este de la un punct cu o viteză mai mare la altul cu viteză mai mică. Apariţia forţei transversale în efectul Magnus nu contrazice simetria imaginii iniţiale : vectorul polar al vitezei poate avea orice direcţie, rămînînd în planul de simetrie m. Efectul Magnus se observă cu uşurinţă la zborul unei mingi zvîrlite cu răsucire (liftate), la jocul de tenis de cîmp sau de masă.

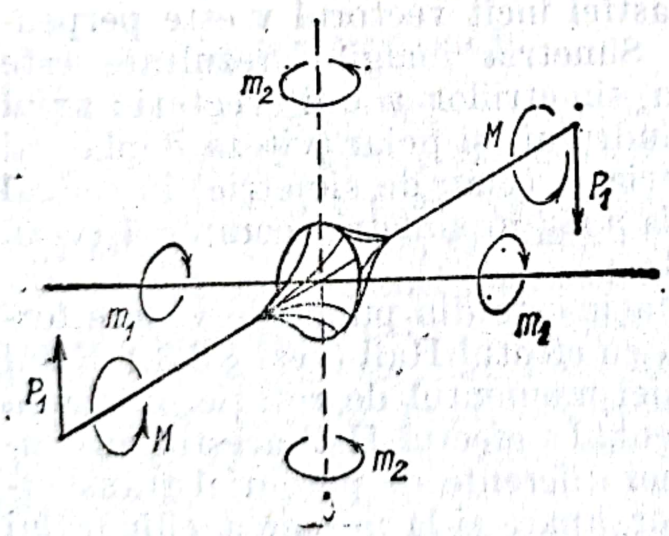


Fig. 96. Giroscopul în rotaţie sub acţiunea momentului m_1 (perechea de forţe P_1) capătă momentul m_2.

Axa unui giroscop liber îşi conservă orientarea în spaţiu. Dacă se încearcă, totuşi, să se rotească această axă în jurul unei direcţii oarecare, giroscopul se va roti şi în direcţie perpendiculară (fig. 96). Simetria imaginii este astfel determinată de ansamblul a trei vectori axiali (vezi fig. 61, b). Prin interacţiunea celor trei vectori axiali se şi explică *precesia* giroscopului simetric. Rotit fiind perpendicular pe axa de rotaţie într-un sens, giroscopul se roteşte şi în sensul perpendicular pe primul. Compunerea mişcărilor m_1 şi m_2 conduce la o rotaţie de echilibru a axei giroscopului (care coincide cu axa lui de simetrie) în jurul direcţiei M (precesie regulată).

Scanned with OKEN Scanner

Interacţiunea gravifică dintre două mase m şi m' este descrisă de *legea gravitaţiei dată de către Newton*:

$$F = -\frac{kmm'}{R^2} \tag{5.4}$$

unde R este distanţa dintre mase, iar k un coeficient de proporţionalitate, în $\text{dyn} \cdot \text{cm}^2 \cdot \text{g}^{-2}$.

Interacţiunea gravifică are simetria tensorului. Legat de aceasta, dacă se consideră că partea din stînga are dimensiunile unei tensiuni $[\text{dyn} \cdot \text{cm}^{-2}]$

$$a = -\frac{k'mm'}{R^2}, \tag{5.5}$$

atunci coeficientul k va avea dimensiunile $[\text{g}^{-1} \cdot \text{cm} \cdot \text{s}^{-2}]$, adică dimensiunile raportului acceleraţie/masă.

Energia potenţială a cîmpului grafic are expresia

$$U = -\frac{\alpha}{r} \tag{5.6}$$

unde α reprezintă o constantă pozitivă. Mişcarea într-un astfel de cîmp este un caz particular al mişcării într-un cîmp de forţe centrale. Corpurile aflate în cîmpul gravific se mişcă după traiectorii descrise de curbe de ordinul doi (elipsă, circumferinţă, hiperbolă, parabolă). În toate cazurile, însă, la un moment dat simetria fenomenului este determinată de simetria ansamblului compus din doi vectori polari (viteza, tangentă la traiectorie în punctul dat şi forţa gravifică) şi un vector axial (*curbura* traiectoriei în punctul* dat). Pentru corpuri care se mişcă în cîmpuri de forţe centrale, curbura traiectoriei într-un punct dat este diferită de zero. Simetria traiectoriei (avînd în vedere direcţia mişcării) în cazul mişcării pe un cerc va fi ∞/mmm (simetria vectorului axial), pe o elipsă — mmm, pe o hiperbolă şi pe parabolă — $mm2$ (grupul simetriei obişnuite m). În ulti-

* Curbura traiectoriei se defineşte ca raportul dintre unghiul ω de rotaţie pe un segment de curbă şi lungimea arcului acestui segment. Curbura este limita acestui raport atunci cînd lungimea segmentului tinde spre zero.

Scanned with OKEN Scanner

mul caz fenomenul este analog efectului Magnus (vezi fig. 95), cu toate că cauza curbării traiectoriei la mişcarea în cîmpul gravific este alta.

Rotaţia uniformă a unei particule materiale pe un cerc, cu viteza unghiulară Ω, este o mişcare accelerată pentru un observator exterior. Să considerăm că între particulă şi axa de rotaţie există o legătură rigidă. Ecuaţiile de mişcare ale unei asemenea particule vor avea forma cea mai simplă într-un sistem de coordonate ce se roteştecu viteza Ω; în acest sistem particula se află în repaus. Sistemul de acest gen este neinerţial şi înţelegerea tensiunii din legătură cînd particula are o poziţie imobilă este posibilă numai dacă. pe lîngă forţa de tensiune din legătură (forţa centripetă, dirijată dinspre particulă spre axa de rotaţie), se consideră şi *forţa centrifugă* inerţială, egală cu cea centripetă,

$$\mathbf{F}_c = m[\Omega[\mathbf{r}\Omega]] \qquad (5.7)$$

unde m este masa particulei, iar $\mathbf{r}$ raza de rotaţie. Forţa centrifugă este îndreptată dinspre axa de rotaţie.

În ecuaţia (5.7) $\mathbf{r}$ este vector polar, Ω — axial, iar produsul lor vectorial va fi un vector polar perpendicular pe Ω (vezi fig. 61, a). Produsul vectorial al acestui nou vector polar cu cel axial va da vectorul forţă centrifugă, de asemenea perpendicular pe Ω. Într-un sistem de coordonate în rotaţie fenomenul are simetria cilindrului (grupul $\infty/m\underline{m}\underline{m}$). Pentru un observator din afară traiectoria particulei ce se roteşte pe un cerc (mişcare accelerată) are simetria vectorului axial (simetrie completă $\infty/m\underline{m}\underline{m}$). În acest caz, mişcarea particulei poate fi tratată formal ca un caz particular al mişcării în cîmp gravitaţional (mişcare pe cerc).

Particula poate lua parte şi la o mişcare mai complicată decît mişcarea pe cerc. Să presupunem că pentru un observator aflat într-un sistem de coordonate ce se roteşte cu viteza unghiulară Ω, ea se mişcă cu o viteză constantă oarecare $\mathbf{v}$. O mişcare de translaţie conduce la încă o forţă inerţială (pe lîngă aceea centrifugă) — *forţa Coriolis*. Această ultimă forţă are expresia

$$\mathbf{F}_c = 2m[\mathbf{v}\Omega]. \qquad (5.8)$$

De aici rezultă că forţa Coriolis acţionează într-un plan perpendicular pe Ω şi pe $\mathbf{v}$ (vezi fig. 61, a). În cazul cînd direcţiile lui $\mathbf{v}$ şi Ω coincid, forţa Coriolis este nulă. În restul cazurilor pro-

dusul vctorial al vectorilor polar **v** și axial **Ω** este un vector polar situat într-un plan perpendicular pe **Ω**. Valoarea absolută a forței Coriolis este determinată de proiecția lui **v** pe această suprafață (vectorul **v'**) și de valoarea absolută a lui **Ω** (fig. 97).

Efectul forței Coriolis se ilustrează de obicei prin faptul că în emisfera nordică a Pămîntului rîurile care curg de la nord spre ecuator au malul drept mai întortocheat decît cel stîng. Malul drept parcă ar veni în întîmpinarea curentului de apă, se udă mai tare și devine mai contorsionat. Pentru un observator care se rotește odată cu Pămîntul un curent de apă ce se mișcă cu viteză constantă nu este supus acțiunii vreunei forțe. Sistemul de referință este totuși, neinerțial și numai presiunea din partea malului asupra curentului poate explica udarea malului drept.

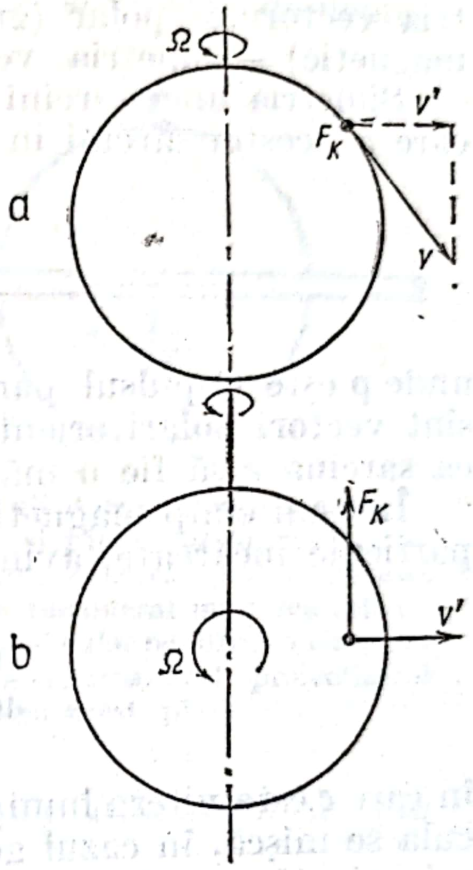


Fig. 97. Orientarea reciprocă a vectorilor **Ω**, **v** și a forței Coriolins $\mathbf{F}_C$:
a — mișcarea particulei pe circumferința unei sfere în rotație (secțiune în planul în care se află vectorii **Ω** și **v**); b — proiecția vectorilor **Ω** și v în planul perpendicular pe **Ω**.

c) EXEMPLE DIN ELECTRICITATE ȘI MAGNETISM

În capitolul 3 și în paragraful precedent ne-am întîlnit cu multe fenomene datorite interacțiunii dintre doi vector reciproc perpendiculari, ca unda electromagnetică (vezi fig. 48), efectul Hall (vezi fig. 63), cîteva fenomene legate de rotirea planului de polarizare al luminii, efectul Magnus (vezi fig. 95) și altele. Trebuie să atragem atenția asupra faptului că interacțiunea a doi vectori se petrece totdeauna cu apariția unui al treilea. Dacă cei doi vectori inițiali sînt unul axial și celălalt polar, al treilea va fi polar (vezi fig. 61, a). Astfel, în unda electromagnetică vectorii inițiali, axial și polar, generează un al treilea vector, vectorul polar Poynting-Umov, care descrie distribuția energiei în undă. Efectul Hall este descris, de asemenea, de un vector polar. O situație analogă este la efectul Magnus, la apariția forței Coriolis ș.a.m.d. Doi vectori axiali generează un vector de asemenea axial (vezi fig. 61, b): de exemplu, apariția precesiei giroscopului la rotația axei sale.

Electricitatea și magnetismul ne furnizează, de asemenea, o mulțime de exemple de interacțiune „transversală" a vectorilor, dintre care vom analiza unele în continuare.

În capitolul 3 s-au dat noțiuni de simetrie a cîmpurilor electrice și magnetice. Primul dintre ele (cîmpul electric) are simetria vectorului polar (grupul $\infty/\underline{m}mm$), iar al doilea (cîmpul magnetic) — simetria vectorului axial (grupul $\infty/m\underline{m}m$).

Simetria unei sarcini electrice este dată de ecuația de mișcare a acestei sarcini în cîmpul electric constant și omogen **E**

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = e\mathbf{E} \tag{5.9}$$

unde **p** este impulsul particulei purtătoare a sarcinii e; **p** și **E** sînt vectori polari orientați după aceeași dreaptă, ceea ce face ca sarcina e să fie o mărime scalară.

Într-un cîmp magnetic constant și omogen **H** mișcarea unei particule încărcate, avînd impulsul **p**, este dată de ecuația

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \frac{e}{c}[\mathbf{vH}] \tag{5.10}$$

în care c este viteza luminii în vid, iar **v** viteza particulei. Particula se mișcă, în cazul general, pe o curbă elicoidală (axa elicei coincide cu direcția cîmpului magnetic). Dacă vectorul **p** este perpendicular pe direcția cîmpului magnetic, particula se mișcă pe un cerc cu raza

$$r = \frac{cp}{eH} \tag{5.11}$$

cu frecvența de rotație

$$\omega = \frac{eH}{mc} \tag{5.12}$$

unde m reprezintă masa particulei. Astfel, mișcarea este descrisă de trei vectori: vectorul axial **H** și vectorul polar **v** generează (conform regulilor produsului vectorial) un vector polar, orientat perpendicular pe cei doi inițiali. *Forța Lorentz*, corespunzătoare acestui vector, este cea care curbează traiectoria. În fie-

Scanned with OKEN Scanner

care moment ansamblul celor trei vectori are simetria $\underline{mm2}$ (vezi fig. 61, a).

Inducţia electromagnetică reprezintă, formal, de asemenea un proces descris de interacţiunea unor vectori, axial şi polar, reciproc perpendiculari: cîmpul magnetic şi vitezele de deplasare în el a unui conductor. Ca rezultat al interacţiunii acestor doi vectori apare un al treilea, polar, reprezentînd vectorul curent electric de inducţie (fig. 98). Sensul curentului (determinat cu aşa numita regulă a „mînii drepte") poate fi determinat utilizînd fig. 63. Mişcarea conductorului, prin care trece curentul, în cîmpul magnetic este, din punct de vedere formal, analogă fenomenului de inducţie electromagnetică. Direcţia şi sensul acestei mişcări pot fi determinate tot cu ajutorul figurii 63. Simetria ambelor fenomene este descrisă de grupul $\underline{mm2}$.

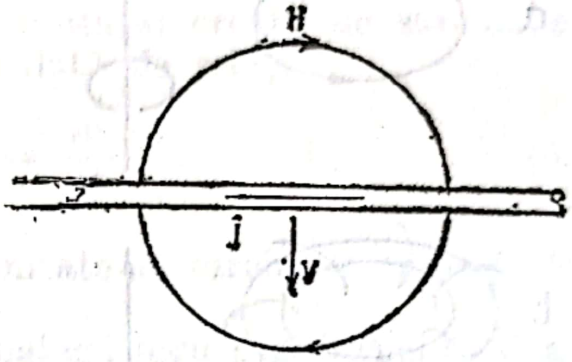


Fig. 98. Orientarea reciprocă a vectorilor **H**, **v** şi **j** în cazul inducţiei electromagnetice. Simetria fenomenului este $\underline{mm2}$. (S-a considerat mişcarea într-un plan perpendicular pe direcţia cîmpului **H**; în cazul general se ia proiecţia lui **v** pe acest plan).

Ecuaţiile Maxwell — care sînt ecuaţiile fundamentale ale electromagnetismului — au forma

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{rot}\mathbf{E} &= -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}; \\ \operatorname{div}\mathbf{H} &= 0; \\ \operatorname{rot}\mathbf{H} &= \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c}\mathbf{j}; \\ \operatorname{div}\mathbf{E} &= 4\pi\rho \end{aligned}\right\} \qquad (5.13)$$

(ρ — densitatea de sarcină electrică). Din punct de vedere al simetriei prima dintre aceste ecuaţii este descrisă de un vector axial (mărimile din ambele părţi ale ecuaţiei sînt vectori axiali), a treia de un vector polar, iar a patra de un scalar. Într-adevăr, în partea dreaptă a primei ecuaţii se află derivata parţială în raport cu timpul a vectorului axial cîmp magnetic, care derivată este — la rîndul său — tot un vector axial. De

aici rezultă că prin rot **E** trebuie înțeles vectorul polar închis în contur (fig. 99, a). În fig. 46, b s-a reprezentat corelația dintre mișcarea unei sarcini și cîmpul magnetic, a cărei simetrie corespundea cazului de mai sus.

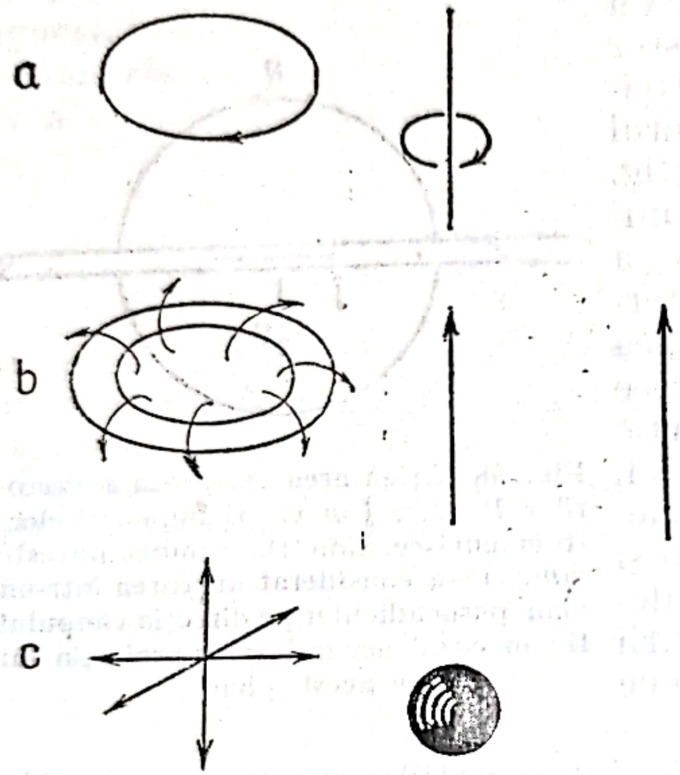


Fig. 99. Interpretarea geometrică a celor două părți ale ecuațiilor lui Maxwell:

a) $\text{rot}\,\mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}$; b) $\text{rot}\,\mathbf{H} = \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c}\mathbf{j}$;

c) $\text{div}\,\mathbf{E} = 4\pi\rho$

Se observă cu ușurință că în partea dreaptă a celei de-a treia ecuații (5.13) se află vectorii polari densitate a curentului **j** și intensitatea cîmpului electric **E** (mai precis, derivata parțială a lui **E** în raport cu timpul, care este tot vector polar). Rezultă că mărimea rot **H** este, de asemenea, un vector polar (fig. 99, b). Din punct de vedere geometric aceasta corespunde cîmpului magnetic închis într-un inel (toroidal). În fig. 46, a s-a reprezentat corelația dintre vectorii **j** și rot **H**.

Operația divergență a vectorului **E** [a patra ecuație (5.13)] transformă un vector polar într-un scalar. Ea constă, așa cum se spune adesea, în *divergența* acestui vector. Într-adevăr, vectorul **E**, orientat după toate direcțiile, formează o figură cu simetria scalarului (fig. 99, c). A doua dintre ecuațiile (5.13) reflectă faptul că, întrucît liniile cîmpului magnetic sînt totdeauna închise (nu există sarcini magnetice), divergența acestui vector este egală cu zero.

Prima și a treia dintre ecuațiile lui Maxwell descriu, după cum se știe, legătura dintre cîmpul electric și cel magnetic în unda electromagnetică. Cîmpul magnetic variabil în timp generează un cîmp electric închis într-un contur, iar cîmpul electric variabil în timp generează un cîmp magnetic toroidal. Ultimul caz corespunde tocmai modelului undei electromagnetice reprezentat în fig. 48.

Scanned with OKEN Scanner

În cazul particular al cîmpului electric constant ecuaţiile lui Maxwell iau forma

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = 4\pi\rho$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = 0.$$

Intensitatea cîmpului electric într-un punct oarecare (forţa ce acţionează asupra sarcinii unitate) creată de sarcina e în cîmpul electric constant, este dată de relaţia

$$\mathbf{E} = \frac{e\mathbf{R}}{R^3} \tag{5.14}$$

(R — distanţa de la sarcina unitate la sarcina e), numită *legea lui Coulomb*.

Legea lui Coulomb este analogă legii gravitaţiei (5.4) a lui Newton. Legea lui Coulomb, scrisă sub forma (5.14), leagă doi vectori polari.

Problema inversării timpului în teoria electricităţii şi în teoria cîmpului electromagnetic este mai complicată decît în mecanică. Astfel, variaţia în timp a impulsului $\mathbf{p}$ al unei particule, cu sarcina e şi care se mişcă în cîmpurile $\mathbf{E}$ şi $\mathbf{H}$ cu viteza $\mathbf{v}$, are forma [vezi ecuaţiile (5.9) şi (5.10)]

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = e\mathbf{E} + \frac{e}{c}[\mathbf{vH}]. \tag{5.15}$$

Această ecuaţie este invariantă în raport cu operaţia de schimbare a semnului timpului $t \to -t$, dacă se consideră (cum se şi face) că la o asemenea schimbare se verifică relaţiile

$$\mathbf{E} \to \mathbf{E}; \quad \mathbf{H} \to -\mathbf{H}. \tag{5.16}$$

Inversarea semnului (şi sensului) cîmpului magnetic înseamnă schimbarea sensului curentului. Astfel, aici se consideră că la inversarea timpului sarcinile îşi conservă semnele, însă sensul mişcării lor (analog cu ceea ce se întîmplă în mecanica clasică) se inversează.

Trebuie să remarcăm, mai întîi de toate, că condiţia (5.14) este arbitrară. Schimbarea semnului timpului nu poate fi considerată drept o operaţie formală, care să conducă la reprezentări pur mecanice. O lume al cărui timp s-ar scurge „în sens opus" poate să difere de lumea noastră, dacă spaţiul şi timpul sînt

Scanned with OKEN Scanner

mai esenţial legate de materie. La fel de îndreptăţit se poate considera, în locul condiţiei (5.16), că atunci cînd $t \to -t$ au loc relaţiile

$$e \to -e;\ \mathbf{E} \to -\mathbf{E};\ \mathbf{H} \to \mathbf{H}. \qquad (5.17)$$

În acest caz ecuaţia (5.15) rămîne tot invariantă în raport cu operaţia de inversare a timpului. Condiţia (5.17) impune inversarea semnului sarcinii. Evident, la o asemenea schimbare, avînd în vedere faptul că la inversarea semnului timpului se inversează şi sensul de mişcare, vectorul cîmp magnetic îşi conservă sensul (fig. 100).

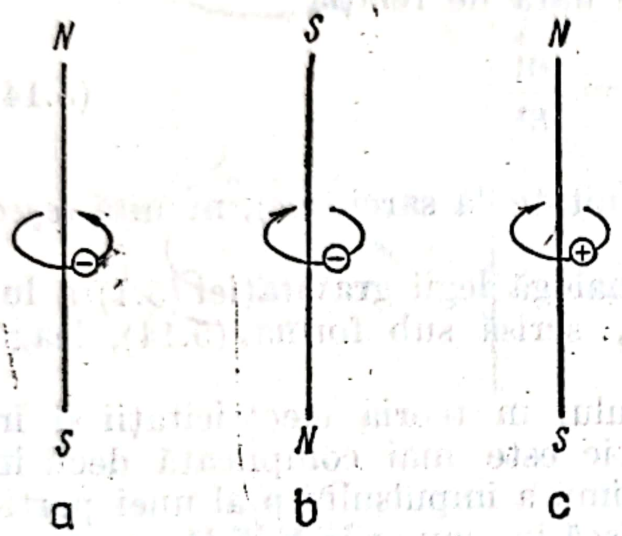


Fig. 100. Legătura dintre sensul cîmpului magnetic, semnul sarcinii electrice şi sensul de rotaţie:

a — poziţia iniţială; b — schimbarea sensului cîmpului magnetic atunci cînd se inversează sensul de rotire al sarcinii electrice, semnul sarcinii rămînînd acelaşi; c — schimbarea simultană a sensului rotaţiei şi a semnului sarcinii nu modifică orientarea cîmpului magnetic.

Ecuaţiile Maxwell (5.13) sînt invariante în raport cu operaţia de inversiune a timpului atît în condiţiile (5.16), cît şi în condiţiile (5.17). Este necesar să avem în vedere că în cazul condiţiilor (5.17) vectorul densitate de curent $\mathbf{j}$ îşi păstrează sensul la inversarea timpului, iar în cazul (5.16) îşi inversează sensul.

Masa grafică (şi inerţia; vezi mai departe) are simetria scalarului. O asemenea masă leagă, în ecuaţiile de mişcare, or vectori polari, or vectori axiali (ultima situaţie se întîlneşte, de exemplu, în cazul corpurilor în rotaţie). Ne putem imagina o „masă" de altă natură, corespunzătoare formal transformării unui vector polar în vector axial (şi invers). În cazul undei electromagnetice, datorită caracterului interacţiei vectorilor, o asemenea „masă" s-ar putea numai *electromagnetică*. Ea ar avea simetria pseudoscalarului ($\infty/\infty/\underline{m}\,\underline{m}\,\underline{m}$). Întrucît undele electromagnetice se propagă în vid, s-ar putea considera că vidul (în absenţa cîmpului gravific) are simetria pseudoscalarului şi că are masă electromagnetică. (Totuşi, această presupunere nu a fost dovedită şi nimic nu o confirmă). În prezenţa cîmpurilor gravitaţionale vidul va avea simetria combinaţiei de scalar cu pseudoscalar — grupul $\infty/\infty 2$. Acesta este unul

dintre grupurile de simetrie posibile pentru spaţiu şi timp (considerate independent) menţionate mai înainte. În fine, din punct de vedere al fizicii clasice spaţiul material şi timpul (adică spaţiul umplut cu gravitaţie şi radiaţie electromagnetică, mai precis, „gata" pentru propagarea undelor electromagnetice) trebuie să aibă aceeaşi simetrie, a combinaţiei dintre un scalar şi un pseudoscalar — grupul $\infty/\infty 2$.

5.2. PROBLEMELE SIMETRIEI ÎN TEORIA RELATIVITĂŢII

a) SPAŢIUL-TIMPUL

În teoria relativităţii noţiunile de spaţiu şi timp sînt adîncite. În teoria *restrînsă a relativităţii* principiul relativităţii al lui Galilei este completat, punîndu-se condiţia ca viteza interacţiunilor să fie finită şi egală cu viteza luminii c. Deja din principiul relativităţii galileiene reieşea că viteza interacţiunilor este aceeaşi în toate sistemele de coordonate inerţiale. Rezultă că viteza luminii este constantă în toate sistemele de coordonate inerţiale.

Viteza luminii în vid este $c = 3 \cdot 10^{10}$ cm/s ($=3 \cdot 10^{8}$ m/s în SI). Pentru reprezentările noastre aceasta este o viteză mare, cu toate că noţiunile de *mare* şi *mică* sînt subiective, relative. Această mărime fundamentală (viteza luminii) caracterizează, în mod general, *corelaţia* dintre spaţiu şi timp : o secundă corepunde la $3 \cdot 10^{10}$ centimetri, un centimetru corespunde la un $(1/3)1 \cdot 0^{-10}$ secunde. Din cele cunoscute în prezent nu este prea clar ce anume determină valoarea lui c. Doar mintal se pot analiza cazurile ei limită : $c = 0$ şi $c = \infty$. Primului caz ($c = 0$) ar trebui să-i corespundă o lume care există doar în timp. Noţiunea de „spaţiu" nu are sens în acest caz : nici un semnal, niciodată, niciunde nu se propagă. Cînd $c = \infty$, dimpotrivă, lumea ar exista în spaţiu, dar nu şi în timp. Spaţiul ar fi infinit, iar timpul nu s-ar scurge, nu s-ar schimba — ar fi constant. Este interesant că din caracterul absolut al timpului (unicitatea lui în toate sistemele inerţiale) decurge automat invariabilitatea sa, absenţa scurgerii sale. În acest caz, dispare însăşi noţiunea de „timp".

Lumea noastră reală nu conţine limitele menţionate : viteza luminii, în ea, este finită şi diferită de zero, iar spaţiul şi timpul sînt continuu legate şi reflectă existenţa unei singure lumi cva-

Scanned with OKEN Scanner

drimensionale. Două puncte *1* și *2* ale spațiu-timpului (două *evenimente*) diferă, în general, prin coordonatele spațiale și sînt separate în timp. *Intervalul* dintre ele este determinat de relația

$$s_{12}^2 = c^2(t_2-t_1)^2-(x_2-x_1)^2 - (y_2-y_1)^2 - (z_2-z_1)^2. \quad (5.18)$$

Intervalul dintre două evenimente este același în toate sistemele de referință inerțiale, adică este un invaraint în raport cu trecerea de la un sistem de referință inerțial la altul*.

Dacă considerăm două sisteme de referință x, y, z, t, și x', y', z', t', cel de-al doilea mișcîndu-se în raport cu primul cu viteza v în direcția x, trecerea de la un sistem la celălalt se realizează în teoria relativității cu ajutorul *transformărilor Lorentz*

$$x=\frac{x'+vt'}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}; \quad y=y'; \quad z=z'; \quad t=\frac{t'-\frac{v}{c^2}x'}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}. \quad (5.19)$$

Toate sistemele de coordonate inerțiale sînt echivalente, nu există un sistem preferențial, cu alte cuvinte un sistem imobil (fix) în spațiu și timp. Astfel, timpul, ca și spațiul, este relativ în teoria relatiității, adică diferă în diferite sisteme de referință inerțiale. Relativismul timpului nu distruge omogenitatea acestuia. Într-un sistem de coordonate dat timpul curge „cu aceeași viteză**.

Adîncirea (precizarea) noțiunilor despre spațiu și timp nu ne permite deci să vorbim despre simetriile lor separat. Grupurile de simetrie spațio-temporală (privită ca un tot) posibile vor fi totuși aceleași grupuri $\infty/\infty/mmm$ și $\infty/\infty 2$ care au fost obținute ca rezultat al „compunerii" simetriei spațiului și timpului considerate separat.

Corelația dintre timpi în două sisteme de referință inerțiale poate fi găsită comparînd intervalele [vezi relația (5.18)]. Observînd un sistem de referință care se mișcă cu viteza v un observator aflat în repaus (într-un sistem nemișcat) va vedea în timpul Δt intervalul $c^2\Delta t^2-\Delta x^2$, iar un observator din sis-

---

* În mecanica clasică analogul intervalului este segmentul

$$\Delta l = [(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2]^{1/2}.$$

** Mișcarea este relativă și, de aceea, poate fi considerată ca mișcare a primului față de al doilea cu viteza $-v$.

Scanned with OKEN Scanner

temul de coordonate în mișcare — intervalul $c^2\Delta t'^2$. Aceste intervale sînt egale

$$c^2\Delta t'^2 = c^2\Delta t^2 - \Delta x^2,$$

de unde

$$\Delta t' = \Delta t \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}, \tag{5.20}$$

cu

$$v^2 = \frac{\Delta x^2}{\Delta t^2};$$

t' se numește *timp propriu*, adică timpul înregistrat de acel observator care se mișcă împreună cu sistemul de coordonate. Formula (5.20) exprimă timpul propriu prin timpul sistemului de referință față de care se petrece mișcarea. În modul acesta, pentru observatorul legat de sistemul de referință, în sistemul său propriu timpul va curge mai încet decît în sistemul față de care el se mișcă.

Folosind transformările Lorentz (5.19) se poate obține încă o relație importantă

$$\Delta x' = \frac{\Delta x}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \tag{5.21}$$

Mărimea $\Delta x'$ din această expresie poate fi considerată drept *lungimea proprie* a unei coarde, adică lungimea pe care o vede observatorul față de care coarda se află în repaus. Atunci formula (5.21) exprimă lungimea proprie a corzii prin lungimea din sistemul de referință față de care se consideră mișcarea. Din această formulă rezultă că coarda va avea cea mai mare lungime în acel sistem față de care ea se află în repaus.

Prin urmare, pentru un observator legat de un sistem, timpul — într-un alt sistem ce se mișcă în raport cu el — curge mai repede, iar coarda se contractă în direcția mișcării. „Spațiul" în mișcare apare comprimat pentru un astfel de observator, iar „timpul" — dilatat. În ansamblu, spațiu-timpul trebuie să aibă simetria ∞/mmm sau ∞ (simetria elipsoidului de rotație sau a cilindrului răsucit).

În teoria relativității se ia, în completarea celor trei axe de coordonate x, y, z, și o axă imaginară. Distanța din intervalul

s_{12} pe această axă se scrie sub forma *ict*. Pentru alegerea unui asemenea sistem se folosește fig. 42. Dacă luăm

$$\left.\begin{aligned} ct &= \frac{1}{2}(\xi_y^{11} + \xi_y^{22}); \quad x = \frac{1}{2}(\xi_x^{12} + \xi_x^{21}); \\ y &= \frac{1}{2i}(\xi_y^{12} + \xi_y^{21}); \quad z = \frac{1}{2}(\xi_z^{11} + \xi_z^{22}), \end{aligned}\right\} \tag{5.22}$$

transformările Lorentz lasă invariant intervalul $c^2t^2 - x^2 - y^2 - z^2$.

c) CÎMPUL GRAVIFIC ȘI CÎMPUL ELECTROMAGNETIC

În cele expuse, pînă acum s-a putut remarca deosebirea formală, din mecanica clasică, între spațiu și timp, pe de o parte, și conținutul lor material, pe de altă parte. Într-adevăr, de exemplu, s-a arătat că invarianța ecuației (5.2), observată în § 5.1 în raport cu inversiunea timpului, are la bază presupunerea că inversiunea timpului *nu schimbă semnul masei**. Din punct de vedere filozofic, într-o asemenea reprezentare timpul apare rupt de materie. Aceeași constatare este valabilă în mecanica clasică și referitor la legătura dintre spațiu și materie. Astfel, în mecanica clasică simetria cîmpului gravific poate fi considerată separat de simetria spațiului și timpului (vezi fig. 49).

În teoria relativității se stabilește o relație fundamentală între masa și energia unei particule în repaus

$$E = mc^2. \tag{5.23}$$

În mecanica relativistă (spre deosebire de cea clasică) energia unui corp liber, adică energia unui sistem închis, este complet determinată și reprezintă o mărime totdeauna pozitivă, legată de masa corpului. Legea conservării masei nu are loc în mceanica relativistă : masa unui corp compus nu este egală cu suma maselor părților sale componente. Legea conservării energiei se aplică, însă, în mecanica relativistă, în energia totală incluzîndu-se și energia de repaus a particulei. În mecanica relativistă, legea conservării energiei înseamnă conservarea univocității timpului.

În teoria generală a relativității se introduce ansamblul masă inertă - masă gravifică. Aceasta ne dă posibilitatea să

---

* Semnul drumului parcurs în mișcare (al coordonatelor) și al forțelor, deci sensul acestor mărimi, se schimbă în raport cu inversiunea temporală.

Scanned with OKEN Scanner

vorbim despre simetria lor generalizată (comună; simetria scalarului — vezi § 5.1 . Legătura spaţiu-timpului cu gravitaţia apare aici foarte distinct. Viteza luminii nu mai este o constantă în teoria generală a relativităţii, ea depinzînd de gravitaţie; luminii se i ataşează masă inertă şi gravifică. Cîmpul gravific *curbează* spaţiul; raza de lumină care parcurge un cîmp gravific neuniform are traiectoria curbată (neliniară).

Prin urmare, numai în absenţa cîmpurilor gravitaţionale spaţiul nu este curbat şi se verifică relaţia (5.18) pentru interval. Măsura curburii este dată de diferenţa dintre intervalul real şi cel calculat cu această formulă. Curbura caracterizează deosebirea metricii spaţiului faţă de cea euclidiană. Mişcarea punctelor materiale, asupra cărora nu acţionează nici un fel de forţe în afară de cele gravifice, are loc pe linii geodezice (sau simplu, geodezice) curbate din spaţiu-timpul cvadridimensional. Drept sursă a cîmpului gravific poate fi orice corp şi orice cîmp de forţe — toate care au masă şi energie.

Curbarea spaţiu-timpului în cîmpul gravific (de fapt, a oricărui spaţiu real) determină în mod evident coborîrea ordinului simetriei lui (a spaţiu-timpului).

Aşadar, radiaţia electromagnetică (unda luminoasă) interacţionează cu cîmpul gravific. Totuşi, aşa cum se arată în teoria gravitaţiei, cîmpul electromagnetic în sine nu produce o curbare a spaţiu-timpului ca acesta. Faptul se datoreşte naturii diferite a celor două tipuri de cîmp. Formal, această deosebire se exprimă prin aceea că natura cîmpului gravific este scalară (în cazul general, polar-tensorială), iar a cîmpului electromagnetic este vectorială. Astfel, în timp ce cîmpul gravific *determină* caracterul metricii spaţio-temporale, cîmpul electromagnetic poate doar *să interacţioneze* cu el în procesul de propagare.

Ca şi în fizica clasică, spaţiu-timpul „umplut" cu gravitaţie şi cu radiaţie electromagnetică (spaţiul real) trebuie să aibă simetria combinaţiei dintre un scalar cu un pseudoscalar (grupul $\infty/\infty 2$).

5.3. SCURTĂ PRIVIRE ASUPRA SIMETRIEI PARTICULELOR ELEMENTARE ŞI ASUPRA PROBLEMEI SISTEMATIZĂRII ACESTORA PE BAZA SIMETRIEI

Folosirea simetriei, cu aplicarea teoriei grupurilor, este la ora actuală cea mai eficace metodă în fizica particulelor ele-

Scanned with OKEN Scanner

mentare. S-au obţinut deja serioase succese în sistematizarea particulelor, a prezicerii unora noi şi a proprietăţilor acestora. Vom expune aici doar cel mai simplu mod de abordare a problemei sistematizării particulelor elementare pe baza simetriei complete*.

Formal, o particulă elementară poate fi reprezentată ca o excitaţie. Fără a analiza natura acestora excitaţii şi mărginindu-ne numai la acelea descrise de tensori polari şi axiali de ordinul doi (adică scalari, vectori şi tensori propriu-zişi), putem spune care este simetria lor corespunzătoare cazului sferic (vezi § 2.3 şi tabelul 14). Aceasta este simetria a 11 grupuri limită şi aproape limită din cadrul simetriei complete : $\infty/\infty/mmm$, $\infty/\infty/\underline{m}\underline{m}\underline{m}$, $\infty/\infty/\underline{m}mm$, $\infty/\infty/m\underline{m}\underline{m}$, $\infty/\infty\underline{2}$, $\infty/\infty 2$, $\infty/\infty m$, $\infty/\infty\underline{m}$, $\infty/\infty mm$, $\infty/\infty\underline{m}\underline{m}$, ∞/∞.

Toate aceste grupuri pot fi reprezentate geometric ca rezultat al compunerii a patru *excitaţii elementare* : scalară, pseudoscalară, polar-vectorială şi axial-vectorială (fig. 101)**. Zece (din cele 11) combinaţii sînt date în fig. 33, a, iar varianta lor „cristalografică" în fig. 37.

Fiecare particulă elementară, considerată formal ca un corp de dimensiuni finite, are o simetrie determinată. Specificul proprietăţilor diferitelor particule elementare trebuie să se reflecte în simetria lor. De pe poziţiile expuse mai sus, problema sistematicii particulelor elementare se reduce la găsirea corespondenţei dintre grupurile de simetrie enumerate şi particulele elementare, folosindu-ne de proprietăţile ultimelor, inclusiv proprietăţile lor cunoscute de simetrie. Pentru unele corelări nu întîmpinăm multe dificultăţi. Astfel, de exemplu, caracterul vectorial al cîmpului electromagnetic şi funcţia de undă vecto-

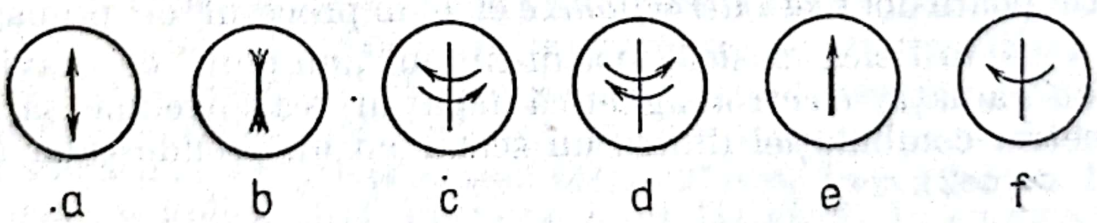


Fig. 101. Reprezentare formală a excitaţiilor elementare sferice : a, b — scalari ; c, d — pseudoscalari ; e, f — excitaţii polar-şi axial-vectoriale.

* O expunere mai aprofundată a § 5.3 şi 5.4 se poate găsi în lucrarea autorului „Aplicarea principiilor de conservare şi a principiilor simetriei la sistematizarea particulelor elementare" în : „Obzorî no atomnoi energhii, 15, 3, 461, 1977.

** Peutru a sublinia caracterul sferic al excitaţiei, aici şi în cele ce urmează vor fi simbolizate prin cercuri.

Scanned with OKEN Scanner

rială a fotonului (γ) ne permit să afirmăm că simetria fotonului este descrisă de grupul $\infty/\infty/\underline{m}mm$. Aceasta este o particulă cu spin întreg (1). Evident, în cazul fotonului particula și antiparticula sînt identice : toți fotonii sînt la fel. Întrucît este o particulă care are numai componente vectoriale, fotonul nu are masă de repaus.

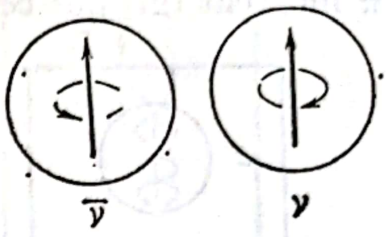


Fig. 102. Reprezentare formală a celor doi neutrini.

Putem concepe o particulă care să aibă altă orientare reciprocă a componentelor polar-vectorială și axială : nu reciproc perpendicular, ci paralel. Pot fi două combinații : dreaptă și stîngă, fără ca una dintre ele să fie antiparticulă în raport cu cealaltă (fig. (102)*. Fiind pur vectorială, această particulă se caracterizează prin masă nulă. Avînd componentă axial-vectorială, evident că particula va lua în cîmp magnetic numai două orientări ; spinul ei este 1/2. Totalitatea caracteristicilor enumerate ne permite să identificăm combinația de excitații analizată cu neutrinul ν. Grupul de simetrie al neutrinului poate fi considerat ∞/∞ 2. Existența masei de repaus trebuie legată de prezența componentelor scalare și pseudoscalare. Componenta pseudoscalară corespunde, după cum se știe, mezonului π^0, conceput în două stări — dreaptă și stîngă, reprezentînd antiparticule una față de cealaltă**. O particulă pur scalară poate fi considerată drept particulară nedescoperită : încă un mezon π^0 sau altă particulă, nouă (fig. 103).

Se pot analiza două variante ale celor mai simple combinații de scalar și pseudoscalar cu excitații polar- și axial-vectoriale. Compunerea unei excitații axial-vectoriale cu un pseudoscalar corespunde, se pare, simetriei perechii electron-pozitron. În concordanță cu existența componentei axial-vectoriale, o asemenea particulă va avea spinul 1/2. Prezența componentei pseudoscalare conduce la faptul că particula și antiparticula vor avea, în acest caz, semne de enantiomorfism diferite (vezi în continuare despre problema conservării partității). Astfel, electronului și pozitronului trebuie să le atribuim simetria descris de grupul $\infty/\infty\underline{mm}$ (vezi fig. 103). Compunerea unui scalar cu o excitație polar-vectorială se pare că corespunde simetriei miuonului μ. Particula și antiparticula vor diferi, în

* Particulele și antiparticulele fiecăreia dintre ele sînt identice.

** Totuși, în fizica particulelor elementare se consideră că mezonul π^0 nu are antiparticulă.

acest caz, prin semnul scalarului; ambele vor avea spinul 1/2. Simetria miuonului este descrisă de grupul $\infty/\infty/m$.

O sarcină în mişcare (componenta polar-vectorială) în combinaţie cu un pseudoscalar trebuie să dea simetria mezonului π încărcat (grupul $\infty/\infty/\underline{m}$). Combinaţia „scalar-vector polar"

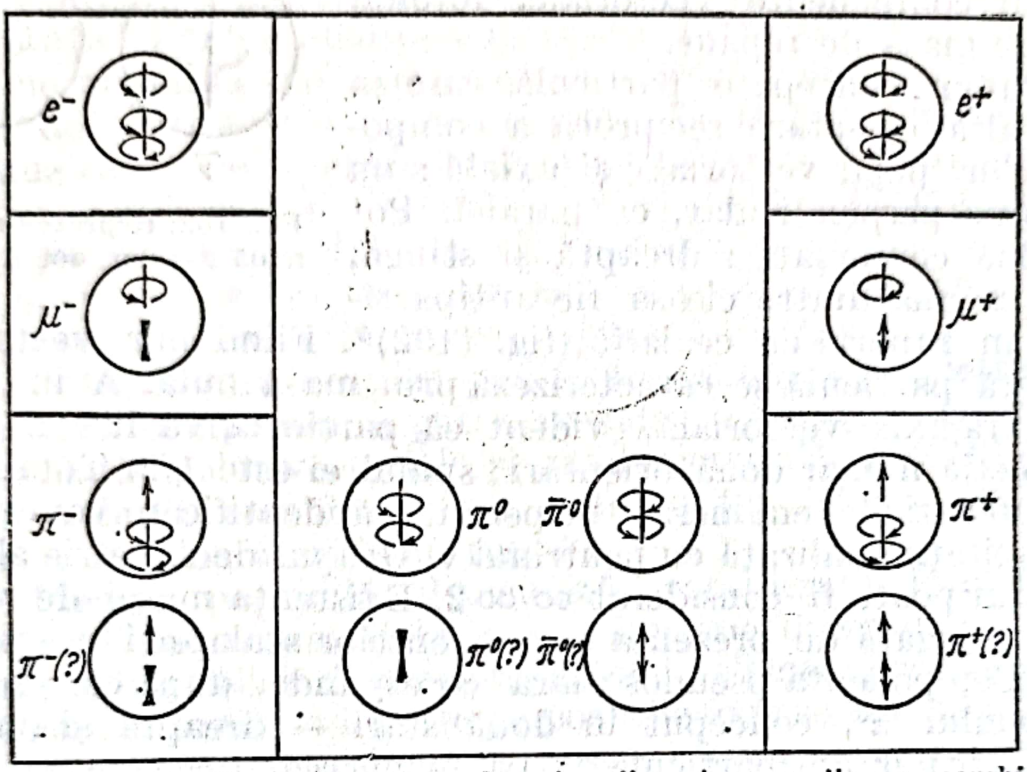


Fig. 103. Electronul, pozitronul, miuonii μ şi mezonii π ca combinaţii ale unor excitaţii elementare scalare (pseudoscalare) şi vectoriale (pseudovectoriale).

(grupul de simtrie $\infty/\infty mm$) corespunde, de asemenea, fie mezonului π (încărcat), fie vreunei particule încă necunoscute (vezi fig. 103). În cele două cazuri date aici ne întîlnim mai întîi cu reprezentarea de particulă cu masă diferită de zero şi avînd o excitaţie sui generis polar-vectorială. De această excitaţie este legată posibilitatea ca o asemenea particulă să reprezinte un dipol electric sui generis. În acest caz, particula nu interacţionează cu cîmpul magnetic (spin întreg), dar trebuie să aibă o proprietate analogă spinului în cîmpul electric. Ea se va orienta într-un astfel de cîmp numai în două moduri: în sensul cîmpului sau opus —, va prezenta cuantificarea „impulsului propriu" în cîmp electric şi altele.

Sînt posibile patru combinaţii de scalar cu pseudoscalar (grupul $\infty/\infty 2$; fig. 104). Două dintre ele se obţin ca combinaţii pare de mezoni π^0 şi antiparticulele lor. Celelalte două reprezintă combinaţii amestecate: se ia un scalar care are semnul parti-

culei și un pseudoscalar cu semnul antiparticulei și invers. După cît se pare, aceste combinații descriu simetria mezonilor K^0 și a stărilor lor „de tranziție". Mezonii K^0 (ca și mezonii π^0) au

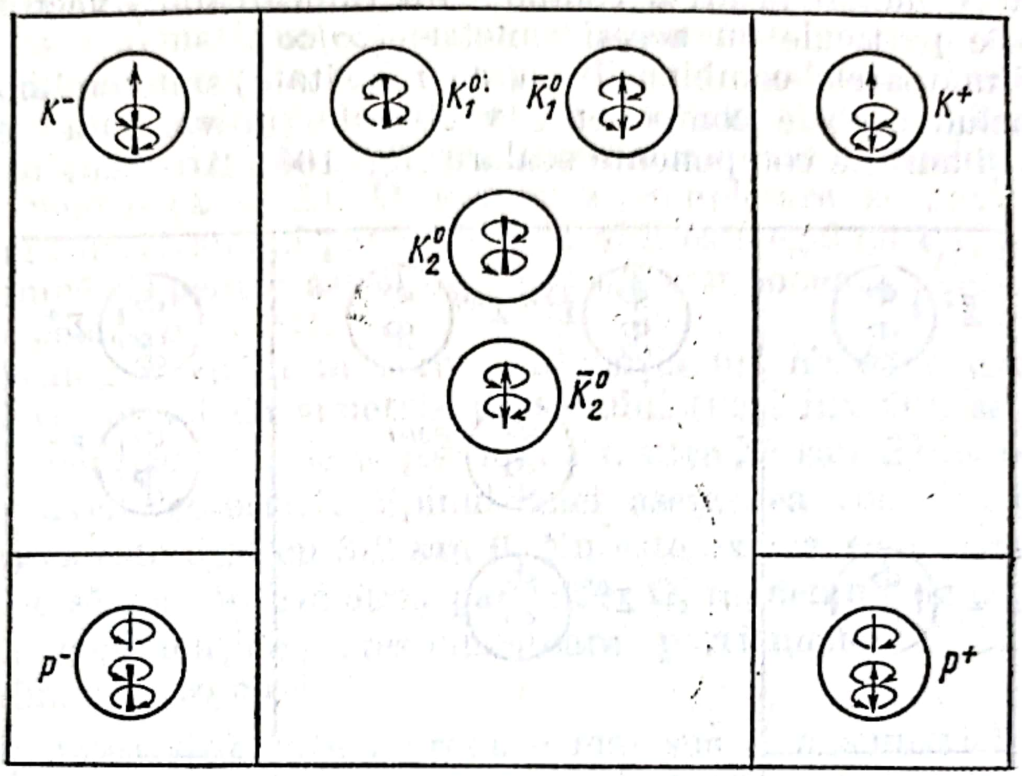


Fig. 104. Mezonii K, protonul și antiprotonul ca combinații ale unor compuneri de scalari și pseudoscalari cu excitații elementare vectoriale și pseudovectoriale.

spinul egal cu zero. La rîndul său, fiecărei perechi de mezoni K^0 îi pot corespunde particule încărcate. În fig. 104 sînt reprezentate patru asemenea particule: două dintre ele corespund perechii K^+, K^-, una protonului și alta antiprotonului. Mezonul K încărcat are spinul întreg, iar protonul și antiprotonul au spinul egal cu 1/2. Toți au simetria ∞/∞. Nu vom analiza aici și alte combinații asemănătoare.

Un grup nou de simetrie formează combinațiile neutrinului cu scalari și pseudoscalari. Aceste particule neutre (neutrinii) au spinul egal cu 1/2. În total sînt aici opt combinații. În fig. 105 sînt date patru dintre ele: două sînt considerate ca descriind neutronul și antineutronul, iar celelalte două ca descriind

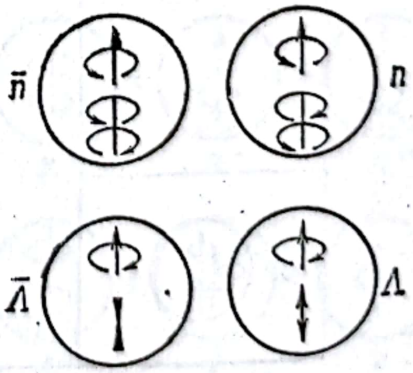


Fig. 105. Neutrino în compuneri cu excitații scalare și pseudoscalare ca model pentru neutron, antineutron și hiperon Λ.

hiperonii Λ și $\overline{\Lambda}$. Grupul de simetrie al tuturor acestor combinații este de asemenea, ∞/∞. Cu toate că neutronul și protonul aparțin unor grupuri diferite, ele sînt farte „asemănătoare", deosebindu-se numai printr-o componentă („încărcată") vectorială. Ambele particule au aceeași simetrie (∞/∞).

Următoarele combinații (ca complexitate) sînt combinațiile ce includ ambele componente vectoriale (în varianta neutrinică) și ambele componente scalare (fig. 106). Acestea sînt par-

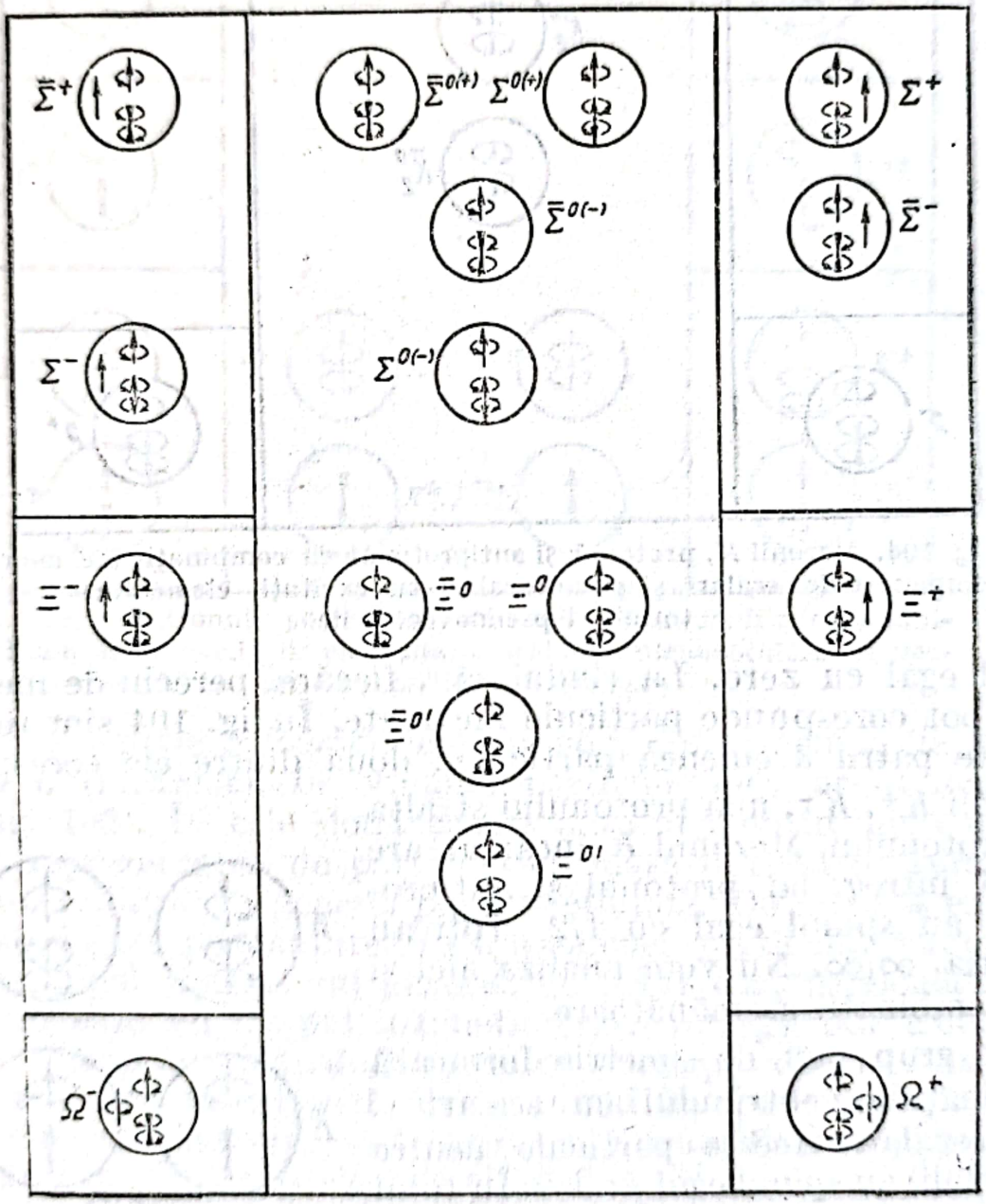


Fig. 106. Simetria particulelor Σ, Ξ și Ω.

ticule neutre. Numărul total de combinații este egal cu opt. După cît se pare, jumătate dintre ele reprezintă particulele

Scanned with OKEN Scanner

Σ^0 (și antiparticulale lor), iar cealaltă jumătate — particulele [Ξ] (și antiparticulele lor). Aceste particule pot fi deosebite numai după neutrino : jumătate corespund neutrinului drept, iar cealaltă jumătate — neutrinul stîng. Cu aceasta s-ar putea încheia sistematizarea *particulelor elementare*, întrucît în ultimul caz analizat de noi se cuprind *toate excitațiile elementare*. Pentru completitudinea tabloului trebuie, totuși, să considerăm și particulele încărcate corespunzătoare ultimelor particule neutre (Σ și Ξ). O asemenea completare se poate face ținînd cont că spinul particulelor Σ și Ξ este egal cu 1/2, ceea ce înseamnă că pentru astfel de particule componenta „încărcată" este polar-vectorială.

Analog modului în care combinația lui K^0 cu o excitație axial-vectorială dă simetria protonului (vezi fig. 20), se poate imagina o combinație a particulei neutre Σ^0 sau Ξ^0 cu o excitație axial-vectorială. Spinul unei asemenea combinații s-ar părea că este egal cu 3/2 sau 0. Nu este exclus ca această ombinație să reflecte simetria particulei Ω, nu demult descoperită. Toate combinațiile corespunzătoare particulelor Σ, Ξ și Ω au simetria ∞/∞.

Justețea sistematicii propuse mai sus și a simetriei particulelor elementare poate fi verificată după proprietățile dezintegrării acestora. Evident, dezintegrarea spontană, în absența acțiunilor exterioare trebuie să conducă la egalitatea sumei componentelor de pînă la și după dezintegrare. Această afirmație corespunde, dacă ne putem exprima așa, legii conservării simetriei, care este — după cît se pare — cea mai generală și mai completă lege a naturii. În fig. 107 este redată interpre-

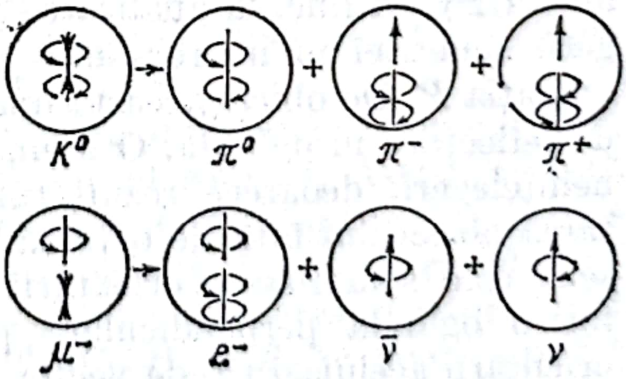


Fig. 107. Ilustrarea dezintegrării particulei K° și a miuonului μ și conservarea excitațiilor elementare.

tarea cîtorva dezintegrări simple cunoscute. La descifrarea reprezentărilor din figură este necesar să se țină seamă că cele două excitații scalare și pseudoscalare opuse ca semn,

Scanned with OKEN Scanner

aflate de aceeași parte a semnlui de egalitate, trebuie să dea împreună zero (din punct de vedere al simetriei). O singură componentă scalară (pseudoscalară) poate trece în două componente vectoriale și invers.

5.4. CONSERVAREA ȘI DISTRUGEREA SIMETRIEI ÎN MICROCOSMOS (INVARIANȚA ÎN RAPORT CU OPERAȚIILE C, P, T ȘI COMBINAȚIILE ACESTORA)

În fizica particulelor elementare o importanță fundamentală o are așa-numita problemă a conservării și distrugerii simetriei. Esența acestei probleme se reduce la aflarea răspunsului la întrebarea: există vreun proces sau altul invariant în raport cu operația de conjugare de sarcină C (schimbarea semnului sarcinilor), în raport cu transformarea spațiului prin reflectarea în oglindă P, în raport cu schimbarea semnului timpului (inversiunea timpului)T și în raport cu combinațiile acestor operații CP, CT, PT și CPT?

Mai întîi de toate, observăm că operațiile C, P, și T pot fi considerate independente numai din punct de vedere formal. În § 5.2 s-a indicat posibilitatea de a considera că schimbarea semnului timpului face totdeauna să se producă inversarea semnului particulei. Mai departe, chiar din reprezentările generale asupra continuității spațiu-timpului decurge o legătură posibilă între P și T. Nu pentru toate particulele este clară interdependența dintre sarcina lor și semnul de enantiomorfism (invariantă CP). În fine, la analizarea problemei conservării și distrugerii simetriei în microcosmos trebuie să se definească precis operația P. De obicei această operație este tratată ca o operație de reflectare în oglindă. O asemenea tratare conduce adesea la neînțelegeri, deoarece rezultatul reflectării depinde de orientarea obiectului față de oglindă. Cel mai bun exemplu în acest sens este schimbarea orientării unui vector polar la reflexia într-o oglindă perpendiculară pe direcția lui și conservarea orientării aceluiași tip de vector la reflexia într-o oglindă paralelă cu vectorul. Pe lîngă aceasta, sensul operației P constă în lămurirea problemei: cum se comportă un fenomen cînd se trece la un sistem de coordonate care are semn de enantiomorfism

Scanned with OKEN Scanner

opus? De aceea, operaţia P trebuie verificată prin intermediul *inversării* sistemului de coordonate în punctul în care se produce schimbarea semnului de enantiomorfism.

Să considerăm pentru început operaţiile C. P şi T ca independente şi să lămurim în ce raport se află particulele elementare şi antiparticulele unele faţă de altele din punct de vedere al acestor operaţii şi al combinaţiilor lor. Evident, calea cea mai simplă constă în explicarea invarianţei excitaţiilor elementare (vezi fig. 101). În cazul excitaţiilor polar-vectoriale şi axial-vectoriale problema corelaţiei dintre particule şi antiparticule nu se pune, întrucît particulele şi antiparticulele sînt identice. Aceasta permite să se afirme că transformarea unei „particule" în „antiparticulă" este, în acest caz, invariantă în raport cu operaţiile C, P, T şi oricare dintre combinaţiile lor.

Pentru explicarea invarianţei C, semnele scalarilor trebuie considerate ca semne ale sarcinilor electrice. În acest caz, operaţia de schimbare a semnului (operaţia C) este invariantă în raport cu transformarea particulei în antiparticulă. Pentru pseudoscalari situaţia este ceva mai complicată. Semnul unui pseudoscalar, definit ca o sarcină electrică în rotaţie, nu este nimic altceva decît „semnul" polului magnetic. Schimbarea semnului sarcinii, evident, nu influenţează sensul rotaţiei şi, de aceea, operaţia va conduce la schimbarea semnului polului magnetic al particulei (mai precis, la schimbarea semnului ei de enantiomorfism), adică de asemenea la antiparticulă.

Să trecem la operaţia P. Inversarea spaţiului nu schimbă semnul scalarilor. De aici rezultă că operaţia P nu transformă o particulă scalară în antiparticulă. În cazul unei particule pseudoscalare, dimpotrivă, o asemenea schimbare are loc în mod cert, deoarece din punct de vedere al operaţiei P este esenţial doar sensul răsucirii (rotaţia sarcinii).

Evident, inversiunea timpului nu influenţează semnul unui scalar, dar face să se inverseze sensul rotaţiei. Astfel, această operaţie nu transformă o particulă scalară în antiparticulă, dar o particulă pseudoscalară o transformă în antiparticulă.

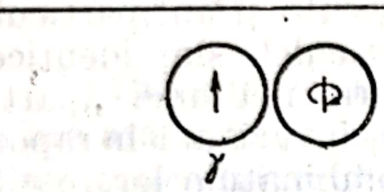
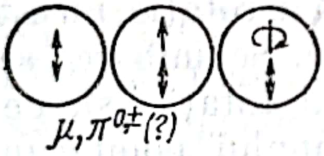
Folosind datele referitoare la comportarea vectorilor şi scalarilor în raport cu operaţiile C, P şi T, se poate urmări uşor invarianţa în raport cu aceste transformări şi cu combinaţiile lor la trecerea de la particule la antiparticule, în toate celelalte cazuri. Aceste date sînt reprezentate simbolic în tabe-

Scanned with OKEN Scanner

lul 41. Semnul plus la o anumită operaţie înseamnă că realizarea ei corespunde trecerii de la particulă la antiparticulă. Semnul minus înseamnă că o asemenea tranziţie nu are loc.

Tabelul 41

Transformarea particulelor şi antiparticulalor în cazul operaţiilor C, P, T şi a combinaţiilor lor

Particulele şi simbolurile lor	C	P	T	CP	CT	PT	CPT
 γ	+	+	+	+	+	+	+
ν	+	−	−	−	−	+	+
 $\mu, \pi^{0,\pm}(?)$	+	−	−	+	+	−	+
$e, \pi^{0,\pm}$	+	+	+	−	−	−	+
$K^{0,\pm}, \rho, n, \Lambda, \Sigma, \Xi, \Omega$	+	−	−	−	−	−	+

Merită atenţie neutrinul. La această particulă, operaţiile C şi T înseamnă trecerea de la $\nu_1 \rightarrow \nu_2$. În ambele cazuri se schimbă numai sensul unuia dintre cei doi vectori. Totuşi, operaţia PT transformă o particulă în ea însăşi, ceea ce pentru neutrino este echivalent cu tranziţia de la particulă la antiparticulă. Vom remarca, de exemplu, că operaţia C şi operaţia combinată CPT transformă, în toate cazurile, particula în antiparticulă. Totuşi, de aici încă nu rezultă că în toate cazurile nu are loc invarianţa PT. Un exemplu este abia amintitul caz al

Scanned with OKEN Scanner

neutrinului. Invarianţa CPT se află în deplină concordanţă cu teoria Luders-Pauli referitoare la ea.

Datele din tabelul 41 permit să se deducă o serie de particularităţi ale simetriei particulelor elementare observate în ultimul timp. Mai întîi să analizăm cum se interpretează, în lumina celor de mai sus, cunoscutele experienţe ale lui Wu şi colaboratorii asupra direcţiei de zbor a electronilor la dezintegrarea cobaltului radioactiv în cîmp magnetic. Din tabel se vede că pentru electroni şi pozitroni ($e^{\mp}$ operaţia P transformă particula în antiparticulă (semnul plus în tabel). Astfel, particulele şi antiparticulele posedă în acest caz enantiomorfism şi au deci semne de enantiomorfism opuse (unele sînt „drepte", celelalte „stîngi"). Din experienţe se ştie că un plan perpendicular pe direcţia cîmpului magnetic este planul de la care într-o parte zboară electronii, iar în cealaltă — pozitronii. Aceasta se poate înţelege numai dacă se ţine sema că particulele „drepte" trebuie să zboare spre polul magnetic „stîng", iar cele „stîngi" spre polul magnetic „drept".

Este interesant că pentru particulele $e^{\mp}$ nu se conservă „paritatea combinată" (transformarea CP), în sensul în care este înţeleasă aici această combinaţie de operaţii : semnul sarcinii electronului nu este legat de semnul de enantiomorfism al electronului. Pentru electroni (pozitroni) în noţiunea de „paritate combinată" se include de obicei transformarea prin care unui semn dat de enantiomorfism îi corespunde un semn dat al sarcinii electrice. În acest sens „paritatea combinată" se conservă la dezintegrarea cobaltului radioactiv. Esenţa este, totuşi, aceeaşi în ambele cazuri : electronul diferă de pozitron şi prin semnul sarcinii, şi prin semnul de enantiomorfism. Încheind scurta privire asupra experienţelor lui Wu, vom observa că o experienţă analogă cu particule nu conduce la un rezultat analog, deoarece direcţiile de zbor ale miuonilor nu se separă în cîmp magnetic. Aceasta se vede bine în tabelul 41 : operaţia P nu transformă, în acest caz, particulele în antiparticule, miuonii nu au semn de enantiomorfism, şi, de aceea, nu pot „distinge" polul magnetic „drept" de cel „stîng".

În ultimul timp se acordă o mare atenţie dezintegrării mezonilor K^0. Acestea sînt particule de simetrie joasă şi transformarea particulei în antiparticulă se realizează numai în cazul operaţiilor C şi CPT (vezi tabelul 41). Studiul comportării acestor particule arată că ele pot să se dezintegreze, în general,

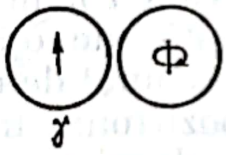
Scanned with OKEN Scanner

atît în doi, cît și în trei mezoni π. Acest fapt în sine nu conduce, totuși, la concluzia că unele legi de conservare și de simetrie a spațiului s-ar „nărui". Pur și simplu, în unele experiențe concrete se evidențiază particularitățile simetriei mezonilor K^0 înșiși.

Toate considerațiile de pînă aici asupra raporturilor de simetrie în care se află particulele și antiparticulele s-au bazat pe faptul că toate operațiile C, P și T sînt independente și pe acea presupunere unanimă și „evidentă" că inversiunea timpului nu schimbă semnul sarcinilor, dar modifică orientarea momentelor magnetice. În § 5.2 s-a vorbit despre faptul că formal nu este exclusă existența și a altei posibilități, și anume posibilitatea ca inversiunea timpului să se petreacă, în particular, cu schimbarea semnelor sarcinilor electrice. De fapt, în această presupunere poate fi vorba doar despre verificarea invarianților P, T', și PT', deoarece operația C nu este de sine stătătoare în

Tabelul 42

Transformările particulelor și antiparticulelor în cazul operațiilor P, T' și PT'

Particulele și simbolurile lor	P	T′	PT′
 γ	+	+	+
ν	−	−	+
$\mu, \pi^{0,\pm}(?)$	−	+	+
$e, \pi^{0,\pm}$	+	−	+
$K^{0,\pm}, p, n, \Lambda, \Sigma, \Xi, \Omega.$	−	−	+

Scanned with OKEN Scanner

acest caz. Invarianţa tuturor fenomenelor şi ecuaţiilor trebuie verificată aici doar în raport cu cele două inversări — inversiunea spaţiului şi inversiunea timpului. Dacă operaţia de inversare a timpului T' înseamnă (în afară de schimbarea „sensului de mişcare") şi schimbarea semnelor sarcinilor electrice, atunci toate ecuaţiile trebuie să fie invariante în raport cu transformarea PT'.

În tabelul 42 sînt reproduse simbolic rezultatele verificării raporturilor de simetrie dintre particule şi antiparticule. Dacă o operaţie sau alta conduce la transformarea particulei în antiparticulă, în tabel se ia semnul plus, iar dacă o asemenea transformare nu are loc — semnul minus. Din tabel se vede că operaţia PT' în ipotezele menţionate mai înainte, conduce la transformarea tuturor particulelor în antiparticule.

Scanned with OKEN Scanner

Anexa Ia

Simetria direcţiilor la cristalele tetragonale

Clasa cristalografică	Indicii direcţiei						
	[001]	[010]	[100]	[hh0]	[h0l]	[0kl]	[hkl]
mmm	mmm	mmm	mmm	$\bar{1}m$	$\bar{1}m$	$\bar{1}m$	$\bar{1}$
222	222	222	222	1/2	1/2	1/2	1
$mm2$	$mm2$	$1/mm$	$1/mm$	1/2	$1m$	$1m$	1
$2/m$	$2/m$	$\bar{1}m$	$\bar{1}m$	$\bar{1}m$	$\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{1}$
2	2	1/2	1/2	1/2	1	1	1
m	$1m$	$1/m$	$1m$	1	$1m$	1	1
$\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{1}$
1	1	1	1	1	1	1	1

Anexa Ib

Simetria direcţiilor la cristalele romboedrice şi hexagonale

Clasa cristalografică	Indicii direcţiei						
	[0001]	$[10\bar{1}0]$	$[11\bar{2}0]$	[hki0]	$[h\bar{h}2hl]$	$[h0\bar{h}l]$	[hkil]
$6/mmm$	$6/mmm$	mmm	mmm	$\bar{1}m$	$\bar{1}m$	$\bar{1}m$	$\bar{1}$
622	622	222	222	1/2	1/2	1/2	1
$6mm$	$6mm$	$1/mm$	$1/mm$	1/2	$1m$	$1m$	1
$\bar{6}m2$	$\bar{6}m2$	$mm2$	$1/mm$	$1m$	$1m$	1/2	1
$6/m$	$6/m$	$\bar{1}m$	$\bar{1}m$	$\bar{1}m$	$\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{1}$
$\bar{6}$	$\bar{6}$	$1m$	$1m$	$1m$	1	1	1
6	6	1/2	1/2	1/2	1	1	1
$\bar{3}m$	$\bar{3}m$	$2/m$	$\bar{1}m$	$\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{1}m$	$\bar{1}$
32	32	2	1/2	1	1	1/2	1
$3m$	$3m$	$1m$	$1/m$	1	$1m$	1	1
$\bar{3}$	$\bar{3}$	$\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{1}$
3	3	1	1	1	1	1	1

Anexa Ic

Simetria direcţiilor la cristalele rombice, monoclinice şi triclinice

Clasa cristalografică	Indicii direcţiei						
	[001]	[010]	[100]	[hh0]	[h0l]	[0kl]	[hkl]
mmm	mmm	mmm	mmm	$\bar{1}m$	$\bar{1}m$	$\bar{1}m$	$\bar{1}$
222	222	222	222	1/2	1/2	1/2	1
$mm2$	$mm2$	$1/mm$	$1/mm$	1/2	$1m$	$1m$	1
$2/m$	$2/m$	$\bar{1}m$	$\bar{1}m$	$\bar{1}m$	$\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{1}$
2	2	1/2	1/2	1/2	1	1	1
m	$1m$	$1/m$	$1m$	1	$1m$	1	1
$\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{1}$
1	1	1	1	1	1	1	1

Scanned with OKEN Scanner

Bazele reprenzentărilor ale grupurilor de simetrie punctuale

$C_1 = 1$

Scalar	Pseudoscalar	Vector polar	Vector axial	Tensor polar	Tensor axial	Reprezentarea	Operația de simetrie
1	2	3	4	5	6	7	8
							1
a	A	$\pm A_{xy}, \pm A_{xz}, \pm A_{yz}$	$\pm a_{xy}, \pm a_{xz}, \pm a_{yz}$	$a_{xx}, a_{yy}, a_{zz}, a_{xy}, a_{xz}, a_{yz}$	$A_{xx}, A_{yy}, A_{zz}, A_{xy}, A_{xz}, A_{yz}$	A	1

$C_i = \bar{1}$

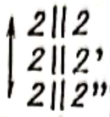
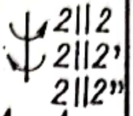
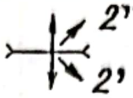
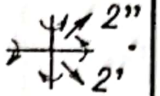
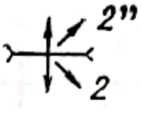
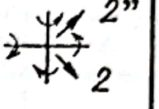
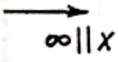
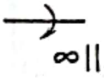
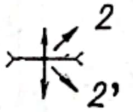
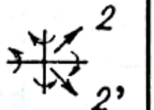
1	2	3	4	5	6	7	8	
							1	C
a			$\pm a_{xy}, \pm a_{xz}, \pm a_{yz}$	$a_{xx}, a_{yy}, a_{zz}, a_{xy}, a_{xz}, a_{yz}$		A_g	1	1
	A	$\pm A_{xy}, \pm A_{xz}, \pm A_{yz}$			$A_{xx}, A_{yy}, A_{zz}, A_{xy}, A_{xz}, A_{yz}$	A_u	1	-1

$S_1 = C_s = m, Z \| m$

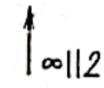
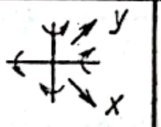
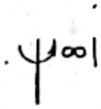
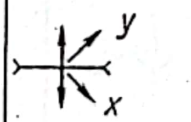
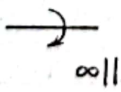
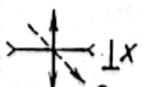
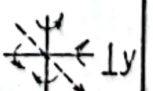
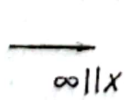
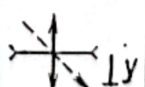
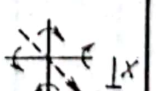
1	2	3	4	5	6	7	8	
							1	m
a		$\infty \| m$	$\infty \perp m$	$2 \perp m$	m	A'	1	1
		$\pm A_{xz}, \pm A_{yz}$	$\pm a_{xy}$	$a_{xx}, a_{yy}, a_{zz}, a_{xy}$	$A_{xz}, A_{zx} = A_{xz}, A_{yz}, A_{zy} = A_{yz}$			
	A	$\infty \perp m$	$\infty \| m$	m	$2 \perp m$	A''	1	-1
		$\pm A_{xy}$	$\pm a_{xz}, \pm a_{yz}$	$a_{xz}, a_{zx} = a_{xz}, a_{yz}, a_{zy} = a_{yz}$	$A_{xx}, A_{yy}, A_{zz}, A_{xy}$			

Scanned with OKEN Scanner

$D_2 = 222, X \| 2'', Y \| 2', Z \| 2$

1	2	3	4	5	6	7	8			
							1	2	2'	2''
a	A			 a_{xx}, a_{yy}, a_{zz}	 A_{xx}, A_{yy}, A_{zz}	A	1	1	1	1
		$\pm A_{xy}$	$\pm a_{xy}$	 $a_{xy}, a_{yx}=a_{xy}$	 $A_{xy}, A_{yx}=A_{xy}$	B_1	1	1	-1	-1
		$\pm A_{xz}$	$\pm a_{xz}$	 $a_{xz}, a_{zx}=a_{xz}$	 $A_{xz}, A_{zx}=A_{xz}$	B_2	1	-1	1	-1
		 $\pm A_{yz}$	 $\pm a_{yz}$	 $a_{yz}, a_{zy}=a_{yz}$	 $A_{yz}, A_{zy}=A_{yz}$	B_3	1	-1	-1	1

$C_{2V} = mm2, Z \| 2$

1	2	3	4	5	6	7	8			
							1	2	$m_{\perp x}$	$m_{\perp y}$
a		 $\pm A_{xy}$		a_{xx}, a_{yy}, a_{zz}	 $A_{xy}, A_{yx}=A_{xy}$	A_1	1	1	1	1
	A		 $\pm a_{xy}$	 $a_{xy}, a_{yx}=a_{xy}$	$A_{xx}, A_{yy}=A_{zz}$	A_2	1	1	-1	-1
		$\pm A_{xz}$	 $\pm a_{yz}$	 $a_{xz}, a_{zx}=a_{xz}$	 $A_{yz}, A_{zy}=A_{yz}$	B_1	1	-1	1	-1
		 $\pm A_{yz}$	$\pm a_{xz}$	 $a_{yz}, a_{zy}=a_{yz}$	 $A_{xz}, A_{zx}=A_{xz}$	B_2	1	-1	-1	1

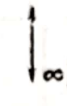
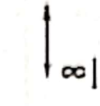
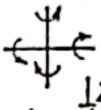
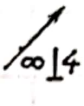
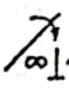
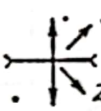
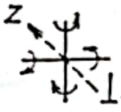
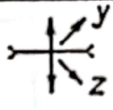
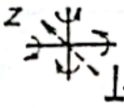
Scanned with OKEN Scanner

$D_{2h} = mmm, z \| 2$

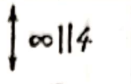
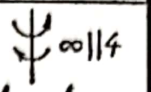
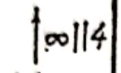
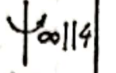
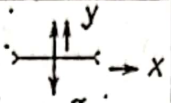
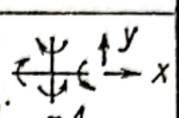
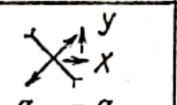
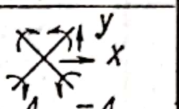
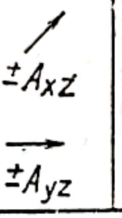
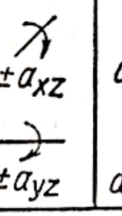
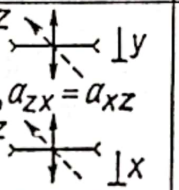
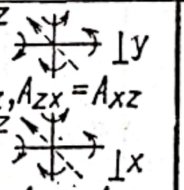
1	2	3	4	5	6	7	8							
							1	2	2'	2''	c	$m_{\perp z}$	$m'_{\perp 2'}$	$m''_{\perp 2''}$
a				$2 \| 2$ a_{xx}, a_{yy}, a_{zz}		A_g	1	1	1	1	1	1	1	1
			$\pm a_{xy}$	$\infty \| 2$ $a_{xy}, a_{yx} = a_{xy}$		B_{1g}	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1
			$\pm a_{xz}$	$\perp 2'$ $a_{xz}, a_{zx} = a_{xz}$		B_{2g}	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1
			$\pm a_{yz}$	$\perp 2''$ $a_{yz}, a_{zy} = a_{yz}$		B_{3g}	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1
	A				$\infty \| 2$ A_{xx}, A_{yy}, A_{zz}	A_u	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1
	$\pm A_{xy}$				$\perp 2$ $A_{xy}, A_{yx} = A_{xy}$	B_{1u}	1	1	-1	-1	-1	-1	1	1
	$\pm A_{xz}$				$\perp 2'$ $A_{xz}, A_{zx} = A_{xz}$	B_{2u}	1	-1	1	-1	-1	1	-1	1
	$\pm A_{yz}$				$\perp 2''$ $A_{yz}, A_{zy} = A_{yz}$	B_{3u}	1	-1	-1	1	-1	1	1	-1

Scanned with OKEN Scanner

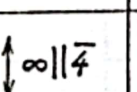
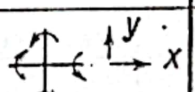
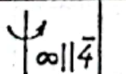
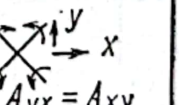
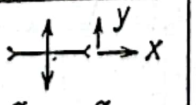
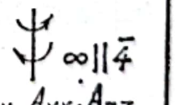
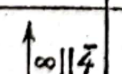
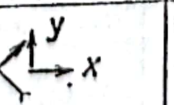
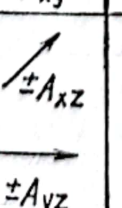
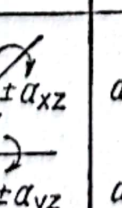
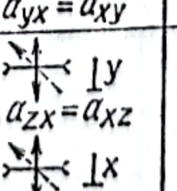
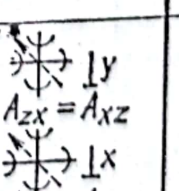
$C_4 = 4,\ Z \| 4$

1	2	3	4	5	6	7	8			
							1	4	2	$4^3=1^1$
a	A	 $\pm A_{xy}$	$\pm a_{xy}$	 a_{xx}, a_{xx}, a_{zz}	A_{xx}, A_{yy}, A_{zz}	A	1	1	1	1
				$a_{xx}, -a_{xx}, a_{xy}$	 $A_{xx}, -A_{xx}, A_{xy}$	B	1	-1	1	1
		 $\pm A_{xz}$	 $\pm a_{xz}$	 $a_{xz}, a_{zx}=a_{xz}$	 $A_{xz}, A_{zx}=A_{xz}$	E	1	i	-1	$-i$
		$\pm A_{yz}$	$\pm a_{yz}$	 $a_{yz}, a_{zy}=a_{yz}$	 $A_{yz}, A_{zy}=A_{yz}$	E	1	$-i$	-1	i

$D_4 = 422, z \| 4$

1	2	3	4	5	6	7	8				
							1	$4_z, 4_z^{-1}$	2	$2_x, 2_y$	$2_{xy}, 2_{xy}$
a	A			 a_{xx}, a_{xx}, a_{zz}	 A_{xx}, A_{xx}, A_{zz}	A_1	1	1	1	1	1
		 $\pm A_{xy}$	 $\pm a_{xy}$			A_2	1	1	1	-1	-1
				 $a_{xx}, -a_{xx}$	 $A_{xx}, -A_{xx}$	B_1	1	-1	1	1	-1
				 $a_{xy}, a_{yx} = a_{xy}$	 $A_{xy}, A_{yx} = A_{xy}$	B_2	1	-1	1	-1	1
		 $\pm A_{xz}$ $\pm A_{yz}$	 $\pm a_{xz}$ $\pm a_{yz}$	 $a_{xz}, a_{zx} = a_{xz}$ $a_{yz}, a_{zy} = a_{yz}$	 $A_{xz}, A_{zx} = A_{xz}$ $A_{yz}, A_{zy} = A_{yz}$	E	2	0	-2	0	0

$D_{2d} = \bar{4}2m, z \| \bar{4}$

1	2	3	4	5	6	7	8				
							1	$\bar{4}_z, \bar{4}_z^{-1}$	2	$2_x, 2_y$	m_{xz}, m_{yz}
a				 a_{xx}, a_{xx}, a_{zz}	 $A_{xx}, -A_{xx}$	A_1	1	1	1	1	1
			 $\pm a_{xy}$		 $A_{xy}, A_{yx} = A_{xy}$	A_2	1	1	1	-1	-1
	A			 $a_{xx}, -a_{xx}$	 A_{xx}, A_{xx}, A_{zz}	B_1	1	-1	1	1	-1
		 $\pm A_{xy}$		 $a_{xy}, a_{yx} = a_{xy}$		B_2	1	-1	1	-1	1
		 $\pm A_{xz}$ $\pm A_{yz}$	 $\pm a_{xz}$ $\pm a_{yz}$	 $a_{xz}, a_{zx} = a_{xz}$ $a_{yz}, a_{zy} = a_{yz}$	 $A_{xz}, A_{zx} = A_{xz}$ $A_{yz}, A_{zy} = A_{yz}$	E	2	0	-2	0	0

Scanned with OKEN Scanner

$C_{4v} = 4mm, Z \| 4$

1	2	3	4	5	6	7	8				
							1	$4, \bar{4}^{-1}$	2	m_x, m_y	$m_{xy}, m_{x'y'}$
a		$\infty \| 4$ $\pm A_{xy}$		$\infty \| 4$ a_{xx}, a_{xx}, a_{zz}		A_1	1	1	1	1	1
	A		$\infty \| 4$ $\pm a_{xy}$		$\infty \| 4$ A_{xx}, A_{xx}, A_{zz}	A_2	1	1	1	-1	-1
				$a_{xx}, -a_{xx}$	$A_{xy}, A_{yx} = A_{xy}$	B_1	1	-1	1	1	-1
				$a_{xy}, a_{yx} - a_{xy}$	$A_{xx}, -A_{xx}$	B_2	1	-1	1	-1	1
		$\pm A_{xz}$ $\pm A_{yz}$	$\pm a_{xz}$ $\pm a_{yz}$	$\perp y; \perp x$ $a_{xz}, a_{zx} = a_{xz}$ $a_{yz}, a_{zy} = a_{yz}$	$\perp y; \perp x$ $A_{xz}, A_{zx} = A_{xz}$ $A_{yz}, A_{zy} = A_{yz}$	E	2	0	-2	0	0

$C_{4h} = 4/m, Z \| 4$

1	2	3	4	5	6	7	8					
							1	$\bar{4}, \bar{4}^{-1}$	2	c	$4, 4^{-1}$	m
a			$\infty \| 4$ $\pm a_{xy}$	$\infty \| 4$ a_{xx}, a_{xx}, a_{zz}		A_g	1	1	1	1	1	1
				$\perp z$ $a_{xx}, -a_{xx}, a_{xy}$		B_g	1	-1	1	1	-1	1
			$\pm a_{xz}$ $\pm a_{yz}$	$\perp y; \perp x$ $a_{xz}, a_{zx} = a_{xz}$ $a_{yz}, a_{zy} = a_{yz}$		E_g	2	0	-2	2	0	-2
		$\infty \| 4$ $\pm A_{xy}$			$\infty \| 4$ A_{xx}, A_{xx}, A_{zz}	A_u	1	1	1	-1	-1	-1
					$\perp z$ $A_{xx}, -A_{xx}, A_{xy}$	B_u	1	-1	1	-1	1	-1
		$\pm A_{xz}$ $\pm A_{yz}$			$\perp y; \perp x$ $A_{xz}, A_{zx} = A_{xz}$ $A_{yz}, A_{zy} = A_{yz}$	E_u	2	0	-2	-2	0	2

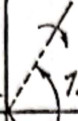
Scanned with OKEN Scanner

$D_{4h} = 4/mmm, z \| 4, x, y \| 2', 2''$

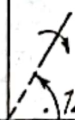
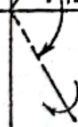
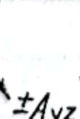
1	2	3	4	5	6	7	8									
							1	4, 4^{-1}	2	2', 2''	2'', 2'''	c	$\bar{4}, \bar{4}^{-1}$	$m_{\perp z}$	$m_{\perp x}, m_{\perp y}$	$m_{xy}, m_{x\bar{y}}$
				$\infty \| 4$ a_{xx}, a_{xx}, a_{zz}		A_{1g}	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
			$\infty \| 4$ $\pm a_{xy}$			A_{2g}	1	1	1	-1	-1	1	1	1	-1	-1
				y x $a_{xx}, -a_{xx}$		B_{1g}	1	-1	1	1	-1	1	-1	1	1	-1
				y x $a_{xy}, a_{yx} = a_{xy}$		B_{2g}	1	-1	1	-1	1	1	-1	1	-1	1
			$\pm a_{xz}$ $\pm a_{yz}$	$\perp y; \perp x$ $a_{xz}, a_{zx} = a_{xz}$ $a_{yz}, a_{zy} = a_{yz}$		E_g	2	0	-2	0	0	2	0	-2	0	0
	A				$\infty \| 4$ A_{xx}, A_{xx}, A_{zz}	A_{1u}	1	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1	-1
		$\infty \| 4$ $\pm A_{xy}$				A_{2u}	1	1	1	-1	-1	-1	-1	-1	1	1
					y x $A_{xx}, -A_{xx}$	B_{1u}	1	-1	1	1	-1	-1	1	-1	-1	1
					y x $A_{xy}, A_{yx} = A_{xy}$	B_{2u}	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1
		$\pm A_{xz}$ $\pm A_{yz}$			$\perp y; \perp x$ $A_{xz}, A_{zx} = A_{xz}$ $A_{yz}, A_{zy} = A_{yz}$	E_u	2	0	-2	0	0	-2	0	2	0	0

Scanned with OKEN Scanner

$C_3 = 3, Z \| 3$

1	2	3	4	5	6	7	8		
							1	3	3^{-1}
a	A	$\infty \| z$ $\pm A_{xy}$	$\infty \| z$ $\pm a_{xy}$	$\infty \| z$ a_{xx}, a_{xx}, a_{zz}	$\infty \| z$ A_{xx}, A_{xx}, A_{zz}	A	1	1	1
		$\pm A_{yz}$ $\pm A_{xz}$ $\perp z$ $120°$	$\pm a_{yz}$ $\pm a_{xz}$  $\perp z$ $120°$	$\perp x, \perp y$ $a_{yz}, a_{zy} = a_{yz}$ $a_{xz}, a_{zx} = a_{xz}$	$\perp x, \perp y$ $A_{yz}, A_{zy} = A_{yz}$ $A_{xz}, A_{zx} = A_{xz}$	E	1	ε	ε^*
		$\pm A_{yz}$ $\pm A_{xz}$	$\pm a_{yz}$ $\pm a_{xz}$	$\perp z$ $a_{xx}, -a_{xx}, a_{xy}$	$\perp z$ $A_{xx}, -A_{xx}, A_{xy}$	E	1	ε^*	ε
							$\varepsilon = \exp(2\pi i/3)$		

$S_6(C_{3i}) = \bar{3}, Z \| \bar{6}$

1	2	3	4	5	6	7	8					
							1	3	3^{-1}	c	$\bar{6}$	$\bar{6}^{-1}$
a.			$\infty \| z$ $\pm a_{xy}$	$\infty \| z$ a_{xx}, a_{xx}, a_{zz}		A_g	1	1	1	1	1	1
			$\pm a_{yz}$ $\pm a_{xz}$  $120°$ $\perp z$	$\perp x, \perp y$ $a_{yz}, a_{zy} = a_{yz}$ $a_{xz}, a_{zx} = a_{xz}$		E_g	1	ε	ε^*	1	ε	ε^*
			 $\pm a_{yz}$ $\pm a_{xz}$	$\perp z$ $a_{xx}, -a_{xx}, a_{xy}$		E_g	1	ε^*	ε	1	ε^*	ε
	A	$\infty \| z$ $\pm A_{xy}$			$\infty \| z$ A_{xx}, A_{xx}, A_{zz}	A_u	1	1	1	-1	-1	-1
		$\pm A_{yz}$ $\pm A_{xz}$ $\perp z$ $120°$			$\perp x, \perp y$ $A_{yz}, A_{zy} = A_{yz}$ $A_{xz}, A_{zx} = A_{xz}$	E_u	1	ε	ε^*	-1	$-\varepsilon$	$-\varepsilon^*$
		 $\pm A_{yz}$ $\pm A_{xz}$			$\perp z$ $A_{xx}, -A_{xx}, A_{xy}$	E_u	1	ε^*	ε	-1	$-\varepsilon^*$	$-\varepsilon$
							$\varepsilon = \exp(2\pi i/3)$					

Scanned with OKEN Scanner

$D_3 = 32$, $Z \| 3$

1	2	3	4	5	6	7	8		
							1	3, 3^{-1}	2, 2, 2
a	A			$\infty \|\|$ a_{xx}, a_{xx}, a_{zz}	A_{xx}, A_{xx}, A_{zz}	A_1	1	1	1
		$\infty \| z$ $\pm A_{xy}$.	$\infty \| z$ $\pm a_{xy}$			A_2	1	1	-1
		$\pm A_{yz}$ $\pm A_{xz}$ 120° $\perp z$	$\pm a_{yz}$ $\pm a_{xz}$ 120° $\perp z$	$\perp x, \perp y; a_{xz}, a_{xz}$, a_{yz}, a_{yz} $\perp z$ $a_{xx}, -a_{xx}$	$\perp x, \perp y; A_{xz}, A_{xz}$, A_{yz}, A_{yz} $\perp z$ $A_{xx}, -A_{xx}$	E	2	-1	0

Scanned with OKEN Scanner

$C_{3h} = \bar{6}, Z \| 3$

1	2	3	4	5	6	7	8					
							1	3	3^{-1}	m	$\bar{3}$	$\bar{3}^{-1}$
a			$\infty \| z$ $\pm a_{xy}$	$\infty \| z$ a_{xx}, a_{xx}, a_{zz}		A'	1	1	1	1	1	1
		$\pm A_{xz}$ $\perp z$ 120° $\pm A_{yz}$		$\perp z$ $a_{xx}, -a_{xx}, a_{xy}$	$\perp x, \perp y$ z $A_{yz}, A_{zy} = A_{yz}$ $A_{xz}, A_{zx} = A_{xz}$	E'	1	ε	ε^*	1	ε	ε^*
							1	ε^*	ε	1	ε^*	ε
	A	$\infty \| z$ $\pm A_{xy}$			$\infty \| z$ A_{xx}, A_{xx}, A_{zz}	A''	1	1	1	-1	-1	-1
			$\pm a_{xz}$ $\perp z$ $\pm a_{yz}$	$\perp x, \perp y$ z $a_{yz}, a_{zy} = a_{yz}$ $a_{xz}, a_{zx} = a_{xz}$	$\perp z$ $A_{xx}, -A_{xx}, A_{xy}$	E''	1	ε	ε^*	-1	$-\varepsilon$	$-\varepsilon^*$
							1	ε^*	ε	-1	$-\varepsilon^*$	$-\varepsilon$

$\varepsilon = \exp(2\pi i/3)$

$D_6 = 622, Z \| 6, X \| 2', Y \| 2''$

1	2	3	4	5	6	7	8					
							1	$6, 6^{-1}$	$3, 3^{-1}$	2	$2', 2', 2'$	$2'', 2'', 2''$
a	A			$\infty \| z$ a_{xx}, a_{xx}, a_{zz}	$\infty \| z$ A_{xx}, A_{xx}, A_{zz}	A_1	1	1	1	1	1	1
		$\infty \| z$ $\pm A_{xy}$	$\infty \| z$ $\pm a_{xy}$			A_2	1	1	1	1	-1	-1
		$\perp z$ x	$\perp z$ x			B_1	1	-1	1	-1	1	-1
		$\perp z$ x	$\perp z$ x			B_2	1	-1	1	-1	-1	1
		$\pm A_{xz}$ $\perp z$ $\pm A_{yz}$	$\pm a_{xz}$ $\perp z$ $\pm a_{yz}$	$\perp x, \perp y$ z $a_{yz}, a_{zy} = a_{yz}$ $a_{xz}, a_{zx} = a_{xz}$	$\perp x, \perp y$ z $A_{yz}, A_{zy} = A_{yz}$ $A_{xz}, A_{zx} = A_{xz}$	E_1	2	1	-1	-2	0	0
				$\perp z$ $a_{xx}, -a_{xx}$	$\perp z$ $A_{xx}, -A_{xx}$	E_2	2	-1	-1	2	0	0

Scanned with OKEN Scanner

$D_{3d} = \bar{3}m$, $z \| \bar{6}$

1	2	3	4	5	6	7	8					
							1	3,3	2,2,2	c	$\bar{6},\bar{6}^{-1}$	m,m,m
a				$\infty \| z$ a_{xx}, a_{xx}, a_{zz}		A_{1g}	1	1	1	1	1	1
			$\infty \| z$ $\pm a_{xy}$			A_{2g}	1	1	-1	1	1	-1
			$\pm a_{yz}$ $120°$ $\perp z$ $\pm a_{xz}$	$\perp x$ a_{yz}, a_{yz} $\perp y$ a_{xz}, a_{xz} $\perp z$ $a_{xx}, -a_{xx}$		E_g	2	-1	0	2	-1	0
	A					A_{1u}	1	1	1	-1	-1	-1
		$\infty \| z$ $\pm A_{xy}$				A_{2u}	1	1	-1	-1	-1	1
		$\pm A_{yz}$ $120°$ $\perp z$ $\pm A_{zx}$			$\perp x$ A_{yz}, A_{yz} $\perp y$ A_{xz}, A_{xz} $\perp z$ $A_{xx}, -A_{xx}$	E_u	2	-1	0	-2	1	0

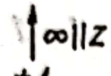
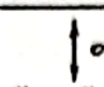
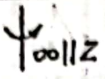
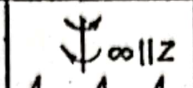
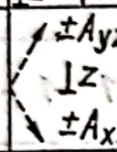
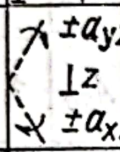
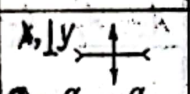
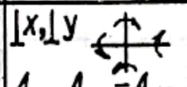
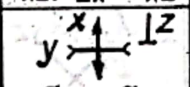
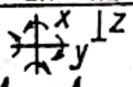
$C = 6, z \| 6$

1	2	3	4	5	6	7	8					
							1	6	3	2	3^{-1}	6^{-1}
a	A	$\infty \| z$ $\pm A_{xy}$	$\infty \| z$ $\pm a_{xy}$	$\infty \| z$ a_{xx}, a_{xx}, a_{zz}	$\infty \| z$ A_{xx}, A_{xx}, A_{zz}	A	1	1	1	1	1	1
		$\perp z$	$\perp z$			B	1	-1	1	-1	1	-1
		$\pm A_{yz}$ $120°$ $\perp z$ $\pm A_{xx}$	$\pm a_{yz}$ $\perp z$ $\pm a_{xz}$	$\perp x$ $a_{yz}, a_{zy}=a_{yz}$ z $\perp y$ $a_{xz}, a_{zx}=a_{xz}$	$\perp x$ $A_{yz}, A_{zy}=A_{yz}$ z $\perp y$ $A_{xz}, A_{zx}=A_{xz}$	E_1	1	ε	$-\varepsilon^*$	-1	$-\varepsilon$	ε^*
							1	ε^*	$-\varepsilon$	-1	$-\varepsilon^*$	ε
				$\perp z$ $a_{xx}, -a_{xx}, a_{xy}$	$\perp z$ $A_{xx}, -A_{xx}, A_{xy}$	E_2	1	$-\varepsilon^*$	$-\varepsilon$	1	$-\varepsilon^*$	$-\varepsilon$
							1	$-\varepsilon$	$-\varepsilon^*$	1	$-\varepsilon$	$-\varepsilon^*$

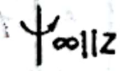
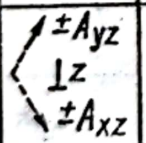
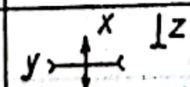
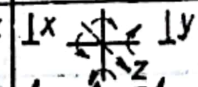
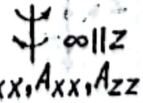
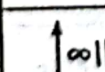
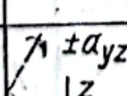
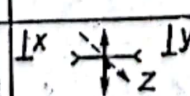
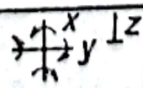
$\varepsilon = \exp(2\pi i/6)$

Scanned with OKEN Scanner

$C_{6v} = 6mm, Z \| 6, X \| m, Y \| m'$

1	2	3	4	5	6	7	8					
							1	$6,6^{-1}$	$3,3^{-1}$	2	m,m,m	m',m',m'
a		 $\pm A_{xy}$		 a_{xx}, a_{xx}, a_{zz}		A_1	1	1	1	1	1	1
	A		 $\pm a_{xy}$		 A_{xx}, A_{xx}, A_{zz}	A_2	1	1	1	-1	-1	
						B_1	1	-1	1	-1	1	-1
						B_2	1	-1	1	-1	-1	1
				 $a_{yz}, a_{zy}=a_{yz}$ $a_{xz}, a_{zx}=a_{xz}$	 $A_{yz}, A_{zy}=A_{yz}$ $A_{xz}, A_{zx}=A_{xz}$	E_1	2	1	-1	-2	0	0
				 $a_{xx}, -a_{xx}$	 $A_{xx}, -A_{xx}$	E_2	2	-1	-1	2	0	0

$D_{3h} = \bar{6}m2, Z \| 3, m \perp Z$

1	2	3	4	5	6	7	8					
							1	$3,3^{-1}$	$2,2,2$	m	$\bar{3},\bar{3}^{-1}$	m',m',m'
a				a_{xx}, a_{xx}, a_{zz}		A_1'	1	1	1	1	1	1
			 $\pm a_{xy}$			A_2'	1	1	-1	1	1	-1
				 $a_{xx}, -a_{xx}$	 $A_{yz}, A_{zy}=A_{yz}$ $A_{xz}, A_{zx}=A_{xz}$	E'	2	-1	0	2	-1	0
	A				 A_{xx}, A_{xx}, A_{zz}	A_1''	1	1	1	-1	-1	-1
		 $\pm A_{xy}$				A_2''	1	1	-1	-1	-1	1
				 $a_{yz}, a_{zy}=a_{yz}$ $a_{xz}, a_{zx}=a_{xz}$	 $A_{xx}, -A_{xx}$	E''	2	-1	0	-2	1	0

Scanned with OKEN Scanner

$C_{6h} = 6/m, z \| 6$

1	2	3	4	5	6	7	1	6	3	-2	3^{-1}	6^{-1}	c	$\bar{3}^{-1}$	$\bar{6}^{-1}$	m	$\bar{6}$	$\bar{3}$
a			$\infty \| z$ $\pm a_{xy}$	$\infty \| z$ a_{xx}, a_{xx}, a_{zz}		A_g	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
			$\perp z$			B_g	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1
			$\pm a_{yz}$ $\perp z$ $\pm a_{xz}$	$\perp x$ $\perp y$ z $a_{yz}, a_{zy} = a_{yz}$ $a_{xz}, a_{zx} = a_{xz}$		E_{1g}	1	ε	$-\varepsilon^*$	-1	$-\varepsilon$	ε^*	1	ε	$-\varepsilon^*$	-1	$-\varepsilon$	ε^*
							1	ε^*	$-\varepsilon$	-1	$-\varepsilon^*$	ε	1	ε^*	$-\varepsilon$	-1	$-\varepsilon^*$	ε
				$\perp z$ $a_{xx}, -a_{xx}, a_{xy}$		E_{2g}	1	$-\varepsilon^*$	$-\varepsilon$	1	$-\varepsilon^*$	$-\varepsilon$	1	$-\varepsilon^*$	$-\varepsilon$	1	$-\varepsilon^*$	$-\varepsilon$
							1	$-\varepsilon$	$-\varepsilon^*$	-1	$-\varepsilon$	$-\varepsilon^*$	1	$-\varepsilon$	$-\varepsilon^*$	1	$-\varepsilon$	$-\varepsilon^*$
	A	$\infty \| z$ $\pm A_{xy}$			$\infty \| z$ A_{xx}, A_{xx}, A_{zz}	A_u	1	1	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1	-1	-1
			$\perp z$			B_u	1	-1	1	-1	1	-1	-1	1	-1	1	-1	1
		$\pm A_{yz}$ $\perp z$ $\pm A_{xz}$			$\perp x$ $\perp y$ z $A_{yz}, A_{zy} = A_{yz}$ $A_{xz}, A_{zx} = A_{xz}$	E_{1u}	1	ε	$-\varepsilon^*$	-1	$-\varepsilon$	ε^*	-1	$-\varepsilon$	ε^*	1	ε	$-\varepsilon^*$
							1	ε^*	$-\varepsilon$	-1	$-\varepsilon^*$	ε	-1	$-\varepsilon^*$	ε	1	ε^*	$-\varepsilon$
					$\perp z$ $A_{xx}, -A_{xx}, A_{xy}$	E_{2u}	1	$-\varepsilon^*$	$-\varepsilon$	1	$-\varepsilon^*$	$-\varepsilon$	-1	ε^*	ε	-1	ε^*	ε
							1	$-\varepsilon$	$-\varepsilon^*$	1	$-\varepsilon$	$-\varepsilon^*$	-1	ε	ε^*	-1	ε	ε^*

$\varepsilon = \exp(2\pi i/6)$

Scanned with OKEN Scanner

$D_{6h} = 6/mmm, z\|6,2; x\|2', m''; y\|2'', m'$

1	2	3	4	5	6	7	8											
							1	$6, 6^{-1}$	$3, 3^2$	2	$2', 2''$	$2'', 2'''$	c	s_3, s_3^{-1}	s_6, s_6^{-1}	m	m', m''	m'', m'''
a				$\infty\|z$ a_{xx}, a_{xx}, a_{zz}		A_{1g}	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
			$\infty\|z$ $\pm a_{xy}$			A_{2g}	1	1	1	1	-1	-1	1	1	1	1	-1	-1
			x			B_{1g}	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1
			x			B_{2g}	1	-1	1	-1	-1	1	1	-1	1	-1	-1	1
			$\pm a_{yz}$ $\perp z$ $\pm a_{xz}$	$\perp x$ z $\perp y$ $a_{yz}, a_{zy} = a_{yz}$ $a_{xz}, a_{zx} = a_{xz}$		E_{1g}	2	1	-1	-2	0	0	2	1	-1	-2	0	0
				y x $\perp z$ $a_{xx}, -a_{xx}$		E_{2g}	2	-1	-1	2	0	0	2	-1	-1	2	0	0
	A				$\infty\|z$ A_{xx}, A_{xx}, A_{zz}	A_{1u}	1	1	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1	-1	-1
		$\infty\|z$ $\pm A_{xy}$				A_{2u}	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	1	1
		x				B_{1u}	1	-1	1	-1	1	-1	-1	1	-1	1	-1	1
		x				B_{2u}	1	-1	1	-1	-1	1	-1	1	-1	1	1	-1
		$\pm A_{yz}$ $\perp z$ $\pm A_{xz}$			$\perp x$ z $\perp y$ $A_{yz}, A_{zy} = A_{yz}$ $A_{xz}, A_{zx} = A_{xz}$	E_{1u}	2	1	-1	-2	0	0	-2	-1	1	2	0	0
					$\perp z$ y x $A_{xx}, -A_{xx}$	E_{2u}	2	-1	-1	2	0	0	-2	1	1	-2	0	0

Scanned with OKEN Scanner

$T = 23$

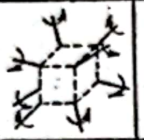
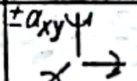
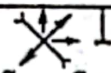
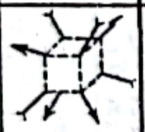
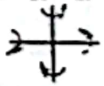
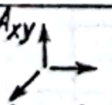
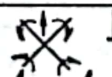
1	2	3	4	5	6	7	8			
							1	2	3	3^{-1}
a	A			a_{xx}, a_{xx}, a_{xx}	A_{xx}, A_{xx}, A_{xx}	A	1	1	1	1
				$\perp z, \perp x, \perp y$ $a_{xx}, -a_{xx}$ $a_{yy}, -a_{yy}$; $a_{zz}, -a_{zz}$;	$\perp z, \perp x, \perp y$ $A_{xx}, -A_{xx}$ $A_{yy}, -A_{yy}$ $A_{zz}, -A_{zz}$	E	1	1	ε	ε^*
							1	1	ε^*	ε
		$\pm A_{yz}$ $\pm A_{xz}$ $\pm A_{xy}$	$\pm a_{yz}$ $\pm a_{xz}$ $\pm a_{xy}$	$\perp x, \perp y, \perp z$ $a_{yz}, a_{zy} = a_{yz}$ $a_{xz}, a_{zx} = a_{xz}$ $a_{xy}, a_{yx} = a_{xy}$	$\perp x, \perp y, \perp z$ $A_{yz}, A_{zy} = A_{yz}$ $A_{xz}, A_{zx} = A_{xz}$ $A_{xy}, A_{yx} = A_{xy}$	T	3	-1	0	0
							$\varepsilon = \exp(2\pi i/3)$			

$O = 432$

1	2	3	4	5	6	7	8				
							1	4	$2(4^2)$	3	2^3
a	A			a_{xx}, a_{xx}, a_{xx}	A_{xx}, A_{xx}, A_{xx}	A_1	1	1	1	1	1
						A_2	1	-1	1	1	-1
				$\perp x, \perp y, \perp z$ $a_{yy}, -a_{yy}$ $a_{zz}, -a_{zz}$ $a_{xx}, -a_{xx}$	$\perp x, \perp y, \perp z$ $A_{yy}, -A_{yy}$ $A_{zz}, -A_{zz}$ $A_{xx}, -A_{xx}$	E	2	0	2	-1	0
		$\pm A_{xy}$ $\pm A_{yz}, \pm A_{xz}$	$\pm a_{xy}$ $\pm a_{yz}, \pm a_{xz}$			T_1	3	1	-1	0	-1
				$\perp x, \perp y, \perp z$ $a_{yz}, a_{zy} = a_{yz}$ $a_{xz}, a_{zx} = a_{xz}$ $a_{xy}, a_{yx} = a_{xy}$	$\perp x, \perp y, \perp z$ $A_{yz}, A_{zy} = A_{yz}$ $A_{xz}, A_{zx} = A_{xz}$ $A_{xy}, A_{yx} = A_{xy}$	T_2	3	-1	-1	0	1

Scanned with OKEN Scanner

$T_h = m\bar{3}$

1	2	3	4	5	6	7	8: 1	2	3	3^{-1}	c	m	$\bar{6}^{-1}$	$\bar{6}$
a						A_g	1	1	1	1	1	1	1	1
				$x, \perp y, \perp z$ $a_{xx}, -a_{xx}$ $a_{yy}, -a_{yy}$ $a_{zz}, -a_{zz}$		E_g	1	1	ε	ε^*	1	1	ε	ε^*
							1	1	ε^*	ε	1	1	ε^*	ε
			$\pm a_{xy}$  $\pm a_{yz}, \pm a_{xz}$	$\perp x, \perp y$  $\perp z$ $a_{xy}, a_{yx} = a_{xy}$ $a_{yz}, a_{zy} = a_{yz}$ $a_{xz}, a_{zx} = a_{xz}$		T_g	3	-1	0	0	3	-1	0	0
	A					A_u	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1
					$\perp x, \perp y, \perp z$  $A_{xx}, -A_{xx}$ $A_{yy}, -A_{yy}$ $A_{zz}, -A_{zz}$	E_u	1	1	ε	ε^*	-1	-1	$-\varepsilon$	$-\varepsilon^*$
							1	1	ε^*	ε	-1	-1	$-\varepsilon^*$	$-\varepsilon$
		$\pm A_{xy}$  $\pm A_{yz}, \pm A_{xz}$			$\perp x, \perp y$  $\perp z$ $A_{xy}, A_{yx} = A_{xy}$ $A_{yz}, A_{zy} = A_{yz}$ $A_{xz}, A_{zx} = A_{xz}$	T_u	3	-1	0	0	-3	1	0	0

$\varepsilon = \exp(2\pi i/3)$

Scanned with OKEN Scanner

$O_h = m\bar{3}m$

1	2	3	4	5	6	7	8									
							1	3	2	4	4^2	c	4	6	(3)m	(6)m'
a						A_{1g}	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
						A_{2g}	1	1	-1	-1	1	1	-1	1	1	-1
				$\perp x,y,z$ $a_{yy},-a_{yy}$ $a_{zz},-a_{zz}$ $a_{xx},-a_{xx}$		E_g	2	-1	0	0	2	2	0	-1	2	0
			$\pm a_{xy}$ $\pm a_{yz},\pm a_{xz}$			T_{1g}	3	0	-1	1	-1	3	1	0	-1	-1
				$\perp x,y,z$ $a_{yz},a_{zy}=a_{yz}$ $a_{xz},a_{zx}=a_{xz}$ $a_{xy},a_{yx}=a_{xy}$		T_{2g}	3	0	1	-1	-1	3	-1	0	-1	1
	A					A_{1u}	1	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1	-1
						A_{2u}	1	1	-1	-1	1	-1	1	-1	-1	1
					$\perp x,y,z$ $A_{yy},-A_{yy}$ $A_{zz},-A_{zz}$ $A_{xx},-A_{xx}$	E_u	2	-1	0	0	2	-2	0	1	-2	0
		$\pm A_{xy}$ $\pm A_{yz},\pm A_{xz}$				T_{1u}	3	0	-1	1	-1	-3	-1	0	1	1
					$\perp x,y,z$ $A_{yz},A_{zy}=A_{yz}$ $A_{xz},A_{zx}=A_{xz}$ $A_{xy},A_{yx}=A_{xy}$	T_{2u}	3	0	1	-1	-1	-3	1	0	1	-1

Scanned with OKEN Scanner

Anexa III a

Modificarea simetriei în cazul apariţiei polarizării electrice spontane la cristalele tetragonale, rombice, monoclinice şi triclinice

Simetria în faza paralectrică	Direcţia polarizării spontane						
	[001]	[100]	[110]	[*hk*0]	[*h*0*l*]	[*hhl*]	[*hhl*]
4/*mmm*	4*mm*(2)	*mm*2(4)	*mm*2(4)	*m*(8)	*m*(8)	*m*(8)	1(16)
4/*m*	4(2)	*m*(4)	*m*(4)	*m*(4)	1(8)	1(8)	1(8)
422	4(2)	2(4)	2(4)	1(8)	1(8)	1(8)	
$\bar{4}$2*m*	*mm*2(2)	2(4)	*m*(4)	1(8)	1(8)		
$\bar{4}$	2(2)	1(4)	1(4)	1(4)			
	[001]	[010]	[100]	[*hk*0]	[*h*0*l*]	[0*kl*]	[*hkl*]
mmm	*mm*2(2)	*mm*2(2)	*mm*2(2)	*m*(4)	*m*(4)	*m*(4	1(8)
222	2(2)	2(2)	2(2)	1(4)	1(4)	1(4)	
2/*m*	1(2)	*m*(2)	*m*(2)	*m*(2)	1(4)	1(4)	1(4)
$\bar{1}$	1(2)	1(2)	1(2)	1(2)	1(2)	1(2)	1(2)

Anexa III b

Modificarea simetriei în cazul apariţiei polarizării electrice spontane la cristalele hexagonale şi romboedrice

Simetria în faza paraelectrică	Direcţia polarizării spontane						
	[0001]	[10$\bar{1}$0]	[11$\bar{2}$0]	[*hki*0]	[*hh*$\bar{2}$*hl*	[*h*0$\bar{h}$*l*]	[*hkil*]
6/*mmm*	6*mm*(2)	*mm*2(6)	*mm*2(6)	*m*(12)	*m*(12)	*m*(12)	1(24)
6/*m*	6(2)	*m*(6)	*m*(6)	*m*(6)	1(12)	1(12)	1(12)
622	6(2)	2(6)	2(6)	1(12)	1(12)	1(12)	
$\bar{6}$*m*2	3*m*(2)		*m*(6)			2(6)	
$\bar{6}$	3(2)						
$\bar{3}$*m*	3*m*(2)	2(6)	*m*(6)	1(12)	1(12)	*m*(6)	1(12)
$\bar{3}$	3(2)	1(6)	1(6)	1(6)	1(6)	1(6)	1(6)
32	3(2)		1(6)			1(6)	

Scanned with OKEN Scanner

Scanned with OKEN Scanner

INDICE ALFABETIC

Activitate optică 127, 159
Antiparticule 277
Antisegnetoelectrici 239
Antisimetrie 73
Axă principală 48
Axe cristalografice 32
~de oglindire 10
~ ~rotaţie 10
Bază, invarianţi ai ~ 202
Caractere ale reprezentărilor ireductibile 201
Clasă cristalografică 29
Cristalografie 117, 199
Coeficienţi piezooptici 178
Conductibilitate electrică 141
Cristale polare 125
~polar-neutre 126
Direcţii axiale 40, 127
~cristalografice echivalente 218
~polare 37, 40
~ ~privilegiate
~răsucite (torsionate) 40
Domenii în antisegnetoelectrici 239
~ ~segnetoelectrici 232
Ecuaţiile lui Maxwell 267
Efect Hall 157
~ ~intern 157
~magnetoelectric 151
~electrocaloric 129
~electrooptic liniar 176
~ ~pătratic 196
~piezoelectric 165
~piroelectric 128
Egalitate (identitate) a figurilor 9
~prin oglindire 9
~ suprapunere 9
Electrogiraţie 183
Electrostricţiune 173, 197
Elipsoid dielectric 142
Enantiomorfism 10
Excitaţii elementare 276
Experienţa Einstein — de Haas 254
Figuri enantiomorfe 10
Forme simple 35, 218
Forţă Coriolis 265
~Lorentz 266
Fotoeleasticitate 191
Grupuri ale simetriei complete 73, 76
~aproape limită 17
~cristalografice de simetrie 22 95, 99
~de simetrie 11
~izomorfe 25
~limită 14, 95
Indici Miller 34

Inducţie electrică 146
Invarianţă spaţială 283
~temporală 283
Inversiune 7, 77
Legea conservării simetriei 282
~lui Hooke 188
Magnetizare spontană 127
Metoda invarianţilor de bază 202
Numere complexe 108
Operaţie unitate 12
Operaţii de antiidentitate
~ ~grup 12
~ ~identitate 9
~echivalente 8
Ordin al unui grup 12
Paraelectrici 217
Paritate, conservare a ~285
Particule elementare 275
Piezoelectricitate 165
Piezomagnetism 179
Piroelectricitate 217
Piromagnetism 127
Plan cristalin 32
~ ~unitate 32
~de simetrie 11
Principiul lui Neuman 122
~relativităţii 271
~ ~galieene 258
~simetriei Curie 17
Polarizare spontană 125
~electrică 145
Proprietăţi (ale cristalelor) 123, 188
Pseudoscalari 43
Reprezentări ireductibile 200
~reductibile 200
Rotaţii 7
~cu antioglindire 7
~ ~inversiune 7
~ ~oglindire 7
Rotirea magnetică 162
~planului de polarizare al luminii 158
Sarcini legate 146
~libere 146
Scalari 43
Segnetoelectrici 216
Segnetoelectricitate 227
Simetria mediilor omogene 68
~proprietăţilor 117
~scalarilor 43
Simetrie completă (totală) 73, 76, 84
~de coloraţie 83
~, elemente de ~ 29, 32
~complementară 84
~magnetică 74
~punctuală 73
~spaţială 232
Singonii 29
Sisteme de coordonate cristalografice 32
Sisteme cristalografice 29
Sistemul direcţiilor cristaline 37
~planelor cristaline 32
~principal de axe 48
Spinori 111
Suprafaţă caracteristică 141
Tensorul deformaţiilor 135
~dilatării termice 137
~electroconductivităţii 141
~permitivităţii magnetice 149
~tensiunilor 131
Tensori axiali 47, 54
~polari 47, 58
Teorema Luders-Pauli 284
Texturi 174
Transformare identică 9
~piezoelectrice 174
Tranziţii de fază segnetoelectrice 216
Vectori axiali 43, 53
~polari 43, 53

Scanned with OKEN Scanner

CUPRINS

Cuvînt înainte 3
Prefață la ediția în limba rusă 5
Capitolul 1. **Simetria** 7
1.1. Simetria figurilor tridimensionale finite (considerații generale) . 7
1.2. Grupuri limită de simetrie. Principiul simetriei formulat de P. Curie 14
1.3. Grupurile de simetrie ale figurilor tridimensionale de dimensiuni finite. Grupurile cristalografice 19
1.4. Simetria scalarilor, vectorilor și tensorilor 43
1.5. Grupurile de simetrie ale tensorilor și grupurile de simetrie ale figurilor de dimensiuni finite 64
Capitolul 2. **Simetria completă (totală)** 73
2.1. Simetria punctuală generalizată (antisimetria, simetria magnetică, simetria completă) 73
2.2. Simetria completă a scalarilor, vectorilor și tensorilor 83
2.3. Grupurile limită și grupurile cristalografice în simetria completă 95
2.4. Simetria numerelor complexe și a spinorilor. 108
Capitolul 3. **Aplicațiile simetriei în fizica cristalelor (cristalofizică)** 117
3.1. Simetria proprietăților și simetria cristalelor 117
3.2. Tensori polari de ordinul doi în fizica mediilor cristaline . . . 130
3.3. Fenomene descrise de tensori axiali de ordinul doi 151
3.4. Fenomene fizice descrise de tensori de ordinul trei 162
3.5. Tensori de ordinul patru și unele fenomene legate de ei . . . 187
3.6. Metodele teoriei grupurilor în cristalografia tensorială 199
Capitolul 4. **Segnetoelectricitatea și simetria** 216
4.1. Tranziții de fază în segnetoelectrici 217
4.2. Domenii în segnetoelectrici 232
4.3. Antisegnetoelectricii 239
4.4. Natura segnetoelectricității studiată pe baza analogiilor de simetrie cu feromagnetismul 250

Scanned with OKEN Scanner

Capitolul 5. Aplicarea simetriei la unele fenomene și probleme fizice 257
5.1. Unele aplicații ale simetriei în fizica clasică 258
5.2. Problemele simetriei în teoria relativității 271
5.3. Scurtă privire asupra simetriei particulelor elementare și asupra problemei sistematizării acestora pe baza simetriei 275
5.4. Conservarea și distrugerea simetriei în microcosmos (invarianța în raport cu operațiile C, P, T și combinațiile acestora) 282

Anexe 287
Indice alfabetic 307

Scanned with OKEN Scanner